
SIC LÆTA QUIESCO

SYMBOLAE
LITTERARIAE
OPVSCVLA VARIA
PHILOLOGICA SCIENTIFICA ANTIQVARIA

SIGNA. LAPIDES, NVMISMATA. GEMMAS

E T

MONVMENTA MEDII AEVI

NVNC PRIMVM EDITA COMPLECTENTES

DECADIS PRIMAE

VOLVMEN DECIMVM

Adiectis Tabulis aere inciſis



FLORENTIAE. CIↃ. IↃ. CC. LIII.

EX IMPERIALI TYPOGRAPHIO

PRAESIDVM PERMISSV

DOMINICO VANDELLIO

VIRO CONSPICVO

CLARISSIMO · CELEBERRIMO

PRIMVM

SERENISSIMI PRINCIPIS

RAYNALDI

ESTENSIS

MVTINENSIVM DVCIS

MATHEMATICO

PVBLICO DOCENDI MVNERE EXORNATO

MOX

FRANCISCI III.

MVTINAE DVCIS

FELICITER REGNANTIS

CVM DIPLOMATVM HONORE

DELECTO ANTIQVARIO EGREGIO
CIMELIARCHAE · GEOGRAPHO
ET MATHEMATICO
PRAESTANTISSIMO
OB SVSCEPTA ITINERA EXHAVSTOSQVE
AD RHENVM COERCENDVM TVTANDOSQ · FINES
PERDIFFICILES LABORES
MVLTIS AB EO HONORIBVS
LAVDIBVS AC PRAEMIIS
AVCTO
DE IISDEM OPTIMIS PRINCIPIBVS
DE PATRIA · DE CIVIVM COMMODIS
DE OMNIGENA ERVDITIONE
DE LITTERARVM GLORIA
COMPLVRIBVS EDITIS INGENII
MONIMENTIS PRAECLARE MERITO
SOCIO COLVMBARIO FLOR ·
AMICO OPTIMO
ANTONIVS FRANCISCVS GORIVS
A · L · D · C ·

PRAEFATIO

P*Oſtremo mearum* Symbolarvm *Voluminì*, *abſoluta hac* Florentinae *editionis* decade *prima*, *eximiam coronidem imponunt Opuſcula VIII. praeſtantiſſimorum aetatis noſtrae Mathematicorum*, *qui praeclara Italiae noſtrae ornamenta iure ac merito habentur*, *& magnis ubique laudibus celebrantur*. *Singula Opuſcula nunc primum in lucem prodeunt*, *eo excepto*, *quod principem locum obtinet*; *cuius exemplaria ſex quum Celeberrimo Franciſco*

Ma-

Mariae ZANOTTIO *quinque ab hinc annis miſiſſem, ut ex ipſa celeritate, qua impreſſa fuerant, intelligeret, quanto in pretio haberem ſummam eius doctrinam, ornatiſſimamque amicitiam, qua me humaniſſime complexus eſt; illud contigit (quo nam modo factum ſit neſcio) ut ſtatim ab eius amico in Germaniam tranſmiſſo exemplari Florentinis typis meis inpenſis impreſſo, prodierit in lucem in Vol. III. cui titulus*, Iournal des Savans d' Italie, anno MDCCXLVIIII. *Gallico tamen idiomate converſum, Articulo V. pag.* 751. *quum tamen Italice idem Clariſſimus Auctor ſcripſiſſet, quale heic deſumtum ex eius autographo exhibetur. Huiuſce vero operis iamdudum impreſſi editionem ad hoc tempus differre coactus ſum. Nuper editum quoque honoris cauſſa eſt in quodam Volumine Actorum Regiae Academiae Pariſienſis. Illud mihi*

valde

valde glorioſum duco, ex eo ipſo meo archetypo Florentiae primum excuſo, has editiones in lucem manaſſe. Gratulor & mihi & ſummo huic Viro, me hiſce quibuſcumque meis officiis, & ſincerae benevolentiae argumentis, ad amplificandam eius nominis & ſapientiae gloriam ac dignitatem, id cumulatiſſimo praemio non ſolum praeſtitiſſe, verum etiam conſecutum eſſe. Illud enim unicum conſilium meum eſt hiſce doctrinae opibus augere theſauros Litteratorum Reipublicae, & ſtudioſis omnibus cum Scientiarum, tum omnigenae Eruditionis Cultoribus prodeſſe, atque uberem eorum gratiam inire. Satis bene video Mathematicorum conatus & lucubrationes laudatiſſimas oportere in lucem emittere ſtatimac immortalibus ſcriptis aeternitati ob iiſdem commendantur; nec Typographorum moras pati poſſe: praeſertim quum alii

illud

illud ipſum, vel quid omnino ſimile, quod inventum excogitatumque eſt, praereptâ primae gloriae palmâ, meditari, atque in lucem proferre poſſint. His adcedunt non leves quaedam difficultates in Tabulis aeri incidendis, & calculis, numeris ac figuris probe exhibendis: quae omnia ſub eorum oculis, & perſpicaciſſimo mentis lumine accuratius in lucem prodire poſſe minime negandum eſt. Quoquo modo res ſe ſe habeat, his omnibus ea qua potui diligentia praeſtandis, ſedulam dedi operam, ut hoc meo qualicumque ſit ſtudio atque officio, eorum amicitia tamdiu fruar, quamdiu eorum nomen & laborum claritudo in litterarum orbe durabit.

Reliquum eſt, ut nunc SECVNDAE DECADI *abſolvendae omnem curam adhibeam; cuius quum Romae per Pleari-nios, eorum typorum favore, iam Volu-*

lumina VIII. in lucem prodierint, tota quanto citius fieri poteſt, abſolvatur. Id poſtulant Amici optimi, qui ad me ſuas oppido eruditas Diſſertationes miſerunt: id poſtulat meum ad iuvandas inluſtrandaſque optimas litteras perpetuum ſtudium; idque etiam aetas mea poſtulat; nam ut ait Ovidius Faſtor. Lib. VI. verſ. 671.

Tempora labuntur, tacitiſque ſeneſcimus annis;
Et fugiunt, freno non remorante, dies.

COLLEGISSE IVVAT

Ex Horatii Carm. Lib. I. Ode I.

ELENCHVS
OPVSCVLORVM SCIENTIFICORVM QVAE IN HOC POSTREMO VOLVMINE PRIMAE DECADIS SYMBOLARVM PROFERVNTVR

I.

SOpra le Figure circoſcritte al Circolo ed alla Sfera: Lettera del Sig. Franceſco Maria ZANOTTI, Celebre Mattematico, Pubblico Profeſſore di Filoſofia nell' Vniverſità di Bologna, e Segretario perpetuo dell' Accademia delle Scienze della medeſima. *Pag.* 1.

II.

Lettera di D. Felice Luigi BALASSI, Canonico Reg. di S. Salvadore di Bologna, che tratta degli Anelli poligonari circoſcritti a' circolari. 20.

III.

Diſsertazione del Sig. Conte Gregorio CASALI Bologneſe, Profeſſor ſoſtituto di Architettura Militare, ed Accademico dell' Iſtituto delle Scienze, e delle Arti, *ſopra alcune nuove proprietà delle Figure quadrilatere*. 27.

Let-

IV.

Lettera I. del Celebre P. Vincenzio RICCATI della Compagnia di Gesù; nella quale ſi dimoſtra, e s' amplia un Teorema del Chiariſſimo Sig. Giovanni BERNOVLLI, ſpettante alla rettificazione delle Curve. 41.

V.

Lettera II. del medeſimo P. RICCATI intorno alla coſtruzione di alcune Formule ſenza la ſeparazione delle indeterminate. 62.

VI.

Oſſervazioni del P. Leonardo XIMENES della Comp. di Gesù, Geografo di S. M. I. dell' Aurora Boreale del dì 3. Febbraio MDCCL. a cui ſi aggiugne uno ſcioglimento di un nuovo Problema per calcolarne le diſtanze ſecondo le Ipoteſi del Majer. 73.

VII.

Oſſervazione del medeſimo dell' Aurora Boreale comparſa la notte del dì 26. Agoſto MDCCL. 90.

VIII.

TEOREMI del Celebre P. D. Franceſco Maria DE' REGI, de' Cherici Regolari di S. Paolo detti Bernabiti, Pubblico Profeſſore di Matematica in Milano nell' Vniverſità Arcimboldica di S. Aleſſandro. 93.

SOPRA LE FIGURE

CIRCOSCRITTE

AL CIRCOLO ED ALLA SFERA

LETTERA

DEL SIGNOR

FRANCESCO MARIA ZANOTTI

A SUA ECCELLENZA REVERENDISSIMA

MONSIGNORE

VITALIANO BORROMEO

VICELEGATO DI BOLOGNA

IO non sò veramente, quanto mi debba eſsere vantaggioſo il deſiderio, che Voi, Monsignore, avete così benignamente dimoſtrato, di vedere in iſcritto due Teoremetti, che io eſpoſi, non ha gran tempo, nell' Accademia; perciocchè ſono eſſi in vero picciola coſa, e più picciola ancora dovrà parere, venendovi ſotto gli occhi, per eſsere conſiderati dal voſtro chiariſſimo, e grandiſſimo, e veramente raro ingegno, dinanzi a cui nulla è, a mio giudicio, che poſsa parer grande. Il perchè la ſteſsa facilità (imperocchè ſono eſſi faciliſſimi) la quale ha pur preſso alcuni guadagnata lor qualche lode, potrebbe preſso Voi, Monsignore, che ſiete avvezzo a coſe più ardue, e più ſublimi, guadagnar loro, non che lode, anzi diſprezzo, e non curanza. Che ſarebbe poi, ſe, per diſavventura, nuovi non foſſero? di che mi fa temere la ſteſsa loro facilità; quantunque uomini verſatiſſimi gli abbiano pur per nuovi ricevuti. E che ſarebbe mai, ſe io mi vi fuſſi ingannato, e eſſi non fuſser più veri? Perchè, ſebbene queſti Signori, che profeſsano la Geometria, non voglion permettere a

ſe ſteſſi di poter dubitare ; a me però lo permetteranno , che non la profeſso . Comunque ſiaſi , io intendo ſervire in ogni modo al deſiderio voſtro , eſponendovi brevemente i due Teoremi con alcune poche annotazioncelle , che vengono ancora eſse timide , e pauroſe ; ma i Teoremi ſteſſi ſe le traggon dietro, penſando per mezzo di eſse di comparir più eſteſi , e univerſali, e far moſtra , per così dire, di tutta quella ſplendidezza , e magnificenza , di cui ſono capaci . Voi , che ſapete unire a i glorioſi affari della Repubblica gli ozj non men glorioſi delle Lettere , e compatire le coſe piccole , fraponendole alle maggiori , accoglierete di buon grado il mio, qualunque ſiaſi , ritrovamento , al quale oramai vengo .

Ognun ſa , che Archimede , il più gran Geometra , che ſia ſtato al mondo mai , o certamente un de' più grandi , ritrovò , che il cilindro circoſcritto alla sfera ſta alla sfera ſteſsa , come la ſuperficie di eſso alla ſuperficie della sfera . Egli volle , che queſto Teorema onoraſse il ſuo ſepolcro , con che fece onore anche al Teorema iſteſso . Duemila anni appreſso , o poco meno , un famoſo Geſuita , Andrea Tacquet , dilatò alquanto il ritrovamento di quel grand' Uomo , e riconobbe nel cono equilatero quella ſteſsa proprietà , che quegli avea riconoſciuta nel cilindro . Nel che ebbe anche la fortuna di ritrovar razionale la proporzione , che paſsa tra il cono equilatero , e la sfera , così come l' avea ritrovata Archimede tra la sfera , e il cilindro . Non ebbe il valentiſſimo Matematico lo ſteſso piacere in un altro ſolido , che egli ſi avviſò di circo-

ſcri-

ſcrivere alla sfera, e che chiamò rombo quadrato; perchè ſebbene queſto rombo quadrato, e la sfera, cui è circoſcritto, ſono tra loro appunto, come le loro ſuperficie; tuttavia la proporzione loro non è razionale: il che parea da deſiderarſi per la vaghezza del Teorema.

Conſiderando io meco ſteſso, non ha gran tempo, queſte coſe, m' invogliai di vedere, ſe io poteſſi dilatare la propoſizione d' Archimede alquanto più. Mi venne anche in animo di trasferirla in certo modo al circolo; parendo a me, che ſe ad un circolo ſi foſse circoſcritto un poligono, il quale foſse ad eſso circolo, come il perimetro alla circonferenza, dovrebbe queſta proporzionalità parere poco men vaga di quella, che o nel cilindro, e nella sfera Archimede, o nella sfera, e nel cono equilatero aveva Tacquet ritrovata. Queſto ſtudio, traendomi d'una in altra conſiderazione, conduſsemi a due Teoremi, che toſto eſpongo.

TEOREMA PRIMO

Qualunque poligono circoſcritto ad un circolo, ſta al circolo ſteſſo, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo.

Dimoſtrazione. Sia un circolo, il cui centro T (Fig. 1.), il raggio T R $= r$. Pongaſi la circonferenza $= c$, onde ſia il circolo ſteſſo $= \frac{cr}{2}$.

A queſto circolo ſia circoſcritto un poligono, i cui lati ſieno A B, C D, E F &c. di qualſivoglia lunghezza, e numero. Egli è certo, che ſe dal

centro T alle eſtremità di qualſiſia lato A B ſaranno condotte due linee T A , T B , verrà il poligono tutto a riſolverſi in altrettanti triangoli , quanti ſono i lati di eſſo . Ed è altresì certo , che tutti queſti triangoli , avendo la loro ſommità nel centro T , averanno anche tutti la medeſima altezza $= TR = r$, eſſendo le loro baſi i lati ſteſſi A B, C D , E F &c. Onde ne ſegue , che la ſomma di tutti i triangoli, che vale a dire il poligono ſteſſo , verrà ad eſſere

$$= \frac{r : \overline{AB + CD + EF \;\&c.}}{2}$$

; eſſendo il perimetro ſenza dubbio $\overline{AB + CD + EF}$ &c. ora egli è chiaro, che

$$\frac{r : \overline{AB + CD + EF \;\&c.}}{2} \,.\, \frac{cr}{2} :: AB + CD + EF \;\&c., \, c$$

ne viene dunque per conſeguenza , che così ſtia il poligono al circolo , cui è circoſcritto , come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo . Ciò che era da dimoſtrarſi .

ANNOTAZIONE I.

LA proprietà è dunque comune ad ogni maniera di poligono, non ſolamente regolare, ma irregolare ancora; valendo la dimoſtrazione medeſima egualmente in tutti .

ANNOTAZIONE II.

DI quì ſi vede, che oltre i poligoni circoſcritti , anche infiniti altri ſe ne poſſono facilmente deſcrivere intorno al circolo , i quali abbiano la ſteſſa proprietà . Per eſempio , ſia deſcritto intorno al circolo X R , (Fig. 2.) un poligo-

ligono A B C D E F G H I K, così, che il lato A B, ſia parte d'una tangente A X, il lato B C ſia parte d' una tangente C R, e così gli altri lati di mano in mano, per modo che poſſa queſto poligono riſolverſi in tanti triangoli, così come abbiamo detto de i circoſcritti. Niente è più facile, che deſcrivere un tal poligono; e deſcritto che ſia, niente è più facile, che dimoſtrare, che eſſo ſta al circolo X R, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo. La ſteſſa dimoſtrazione, che abbiamo addotta di ſopra, ſi adatterà anche a queſto poligono faciliſſimamente, e per così dire, da ſe medeſima.

Di quì ne viene, come ognuno può facilmente vedere, che ſe allo ſteſſo circolo ſaranno circoſcritti più poligoni, come ſe al circolo XR (Fig. 3.) ſaranno circoſcritti due poligoni A E I, C G L, tagliandoſi vicendevolmente i lati dell' uno, e i lati dell' altro in B, D, F &c. e conſiderando ſolamente le parti eſteriori di eſſi lati, come A B, B C, C D &c. ſi prenda il poligono A B C D E F G H &c. ſarà altresì queſto poligono al circolo X R, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo. Quanti poligoni adunque, e con quanta facilità poſſono oramai circoſcriverſi al circolo, o deſcrivergliſi all' intorno, i quali abbiano tutti una tale proprietà!

ANNOTAZIONE III.

E Già ſi manifeſta quaſi da ſe, che tutti i poligoni circoſcritti a un medeſimo circolo ſono tra loro, come i lor perimetri.

TEOREMA SECONDO

QUalunque ſolido, chiuſo per ogni parte da ſuperficie piane, e circoſcritto ad una sfera, ſta alla sfera ſteſſa, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

Dimoſtrazione. SIA una sfera, il cui centro T (Fig. 4.) il raggio T R $= r$ Pongaſi la circonferenza del circolo maſſimo $= c$ il che poſto ſarà la sfera ſteſſa $= \frac{2crr}{3}$, e la ſuperficie della sfera $= 2cr$. A queſta sfera ſia circoſcritto un ſolido, chiuſo dalle ſuperficie piane A B, C D, E F &c. le quali ſieno di qualſivoglia grandezza, figura, e numero. Egli è certo, che ſe per tutti i lati di qualſiſia piano A B ſi condurranno altri piani, che paſſino tutti per lo centro T; verrà il ſolido a riſolverſi in altrettante piramidi, quanti ſono i piani, che lo chiudono. Ed è certo altresì, che avendo tutte queſte piramidi la loro ſommità nel centro T, averanno anche tutte la medeſima altezza $=$ T R $= r$; eſſendo le loro baſi i piani ſteſſi A B, C D, E F &c. onde ne ſegue, che la ſomma di tutte le piramidi, che vale a dire il ſolido

lido ſteſſo, verrà ad eſſere $= r : \frac{AB + CD + EF \,\&c.}{3}$
eſſendo la ſuperficie del ſolido ſenza dubbio AB + CD + EF &c. ora egli è chiaro, che

$$r : \frac{\overline{AB + CD + EF} \,\&c.}{3}, \frac{2crr}{3} : : AB + CD + EF, \&c.\; 2cr$$

ne viene dunque per conſeguenza, che così ſtia il ſolido alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Ciò che era da dimoſtrarſi.

ANNOTAZIONE I.

NON è più dunque da cercarſi una tale proprietà nè nel cubo, nè nella piramide, nè in alcun altro tal ſolido o regolare, o irregolare, che egli ſiaſi; giacchè l' addotta dimoſtrazione ſi ſtende egualmente a tutti.

ANNOTAZIONE II.

E Quì leggiermente ſi vede, che oltre i ſolidi circoſcritti, anche infiniti altri ſe ne poſſono deſcrivere intorno ad una sfera, i quali abbiano la ſteſſa proprietà; purchè le ſuperficie, da cui ſon chiuſi, ſieno ognuna, parte di un qualche piano, il qual tocchi la sfera; poichè, ciò poſto, ſe potrà il deſcritto ſolido riſolverſi in tante piramidi, così come abbiamo detto de' circoſcritti, potrà la ſteſſa dimoſtrazione applicarviſi faciliſſimamente. Quanti ſolidi adunque, e con quanta facilità, poſſono oramai o circoſcriverſi ad una sfera, o deſcriverleſi all' intorno, i quali abbiano tutti la ſopradetta proprietà!

AN-

ANNOTAZIONE III.

ORamai non credo, che più faccia d'uopo avvertire, che tutti i ſolidi chiuſi per ogni parte da ſuperficie piane, e circoſcritti alla medeſima sfera, ſono tra loro, come le lor ſuperficie.

ANNOTAZIONE IIII.

SE noi conſidereremo il cilindro (ſecondo la permiſſione, che ne da oggidì la Geometria degl' infinitamente piccoli) come un priſma, e il cono, come una piramide, facendo ragione, che le ſuperficie curve, le quali circondano queſti due ſolidi, ſieno compoſte di infiniti piani; egli è certo, che il cilindro non ſi dirà circoſcritto alla sfera, ſe non allora quando tutti gl'infiniti piani, che lo chiudono, toccheranno la sfera; e lo ſteſſo ſimilmente vuol dirſi del cono. Or chi non vede, che, preſo un tale aſpetto, tanto il cono, quanto il cilindro vengono a porſi, quaſi da ſe ſteſſi, ſotto la ſpecie di que' ſolidi, che fino ad ora abbiamo conſiderati; e che per conſeguente sì l' uno, come l' altro, eſſendo circoſcritto alla sfera, dee ſtare alla sfera ſteſſa, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera?

E quì già ſi ſcuopre, che il Teorema famoſo di Archimede, e quello di Tacquet, oramai più altro non ſono, che due caſi particolari del Teorema, che io ho propoſto, il quale ſe gli trae dietro, e traendogli dietro, gli eſtende ancora all' infinito. Ciò che potrà intenderſi dalle

ſe-

ſeguenti Annotazioni, che verſeranno tutte intorno al cilindro, ed al cono.

Intorno al Cilindro.

ANNOTAZIONE V.

SIA un cilindro BH (Fig. 5.) circoſcritto ad una sfera, il cui centro ſia C. Non ha dubbio, che il cilindro ſtarà alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Queſto fu già dimoſtrato dal grande Archimede: e queſto iſteſſo pur ne dimoſtra il Teorema poc' anzi addotto, e dimoſtra anche più. Imperocchè, ſe il cilindro BH ſi prolunghi indefinitamente fino in F, e quindi ſi tagli a traverſo con un piano EF, il quale tocchi la sfera in un punto M, egli verrà a ſegnarſi un pezzo di cilindro BEFDB, circoſcritto alla sfera, che io chiamerò *cilindraceo*. Ed è chiaro, che queſto *cilindraceo* ſta eſſo pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera; non eſſendo ciò, che un caſo particolare del Teorema, che ſopra abbiamo dimoſtrato.

Che ſe voleſſimo de' *cilindracei*, che aveſſero alla sfera una proporzione razionale, egli ſarà pur facile il farne infiniti. Ecco per qual modo. Sia AT diametro della sfera, e inſieme aſſe del cilindro. Prendaſi ſu queſto diametro la CP, la quale abbia al raggio della sfera una proporzione razionale; e quindi condotta PM perpendicolare al diametro AT, la qual tagli la ſuperficie della sfera, nel punto M; tagliſi il cilindro con un piano EF, il qual tocchi la sfe-

sfera in M; e il *cilindraceo*, che ne verrà B E F D B avrà alla sfera una proporzione razionale. Ciò che potrà ſcuoprirſi con un calcolo aſſai ſemplice.

ANNOTAZIONE VI.

NE' a queſto *cilindraceo* ſolamente, ma ad un altro ancora ſi eſtende il propoſto Teorema. Imperocchè, ſe avendo prolungato il cilindro B H (Fig. 5.) indefinitamente fino in F, e tagliatolo con un piano E F, che tocchi la sfera in M, eſſo ſi prolungherà di nuovo dall' altra parte indefinitamente fino in K, e ſi taglierà con un altro piano I K, che tocchi la sfera in V, ne verrà un' altro *cilindraceo* EIKFE circoſcritto alla sfera, e ſarà egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. La dimoſtrazione è pur ſempre quella ſteſſa.

ANNOTAZIONE VII.

CHE ſe il cilindro B H (Fig. 5.) o l' un *cilindraceo* B E F D B, o l' altro E I K F E, ſi taglierà con altri, ed altri piani in infinito, ognun de' quali tocchi la sfera, così che ne rimanga intorno alla sfera un pezzo informe di cilindro, chiuſo da una ſuperficie cilindrica tagliata in mille guiſe, e da tanti piani, quanti ognuno ne voglia; ſarà queſto pezzo egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera; perciocchè valerà anche in queſto la dimoſtrazione medeſima.

In-

Intorno al Cono

ANNOTAZIONE VIII.

SIA un cono B V L (Fig. 6.) circoſcritto ad una sfera, il cui centro ſia C. L' ingegnoſiſſimo Tacquet ha dimoſtrato, che, ſe il cono B V L ſarà equilatero; egli avrà alla sfera quella ſteſſa proporzione, che la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Il Teorema da noi propoſto moſtra lo ſteſſo, ſenza però aver biſogno, che il cono ſia equilatero; perciocchè la dimoſtrazione, che ne abbiamo addotta, la fa valere egualmente in ogni cono circoſcritto alla sfera, qualunque e' ſiaſi.

E quand' anche voleſſimo, che la proporzione del cono alla sfera foſse razionale; non per queſto però ſi richiederebbe, che foſse il cono equilatero; perciocchè infiniti altri ſe ne poſsono circoſcrivere alla sfera, che abbiano una proporzione tale. Eccone una maniera faciliſſima. Sia A T diametro della sfera, ed altresì aſse del cono. Prendaſi ſu queſto diametro la C P, la quale abbia al raggio della sfera una proporzione razionale; e quindi condotta P M perpendicolare al diametro A T, la quale tagli la ſuperficie della sfera nel punto M; circoſcrivaſi alla sfera un cono B V L, il cui lato B V tocchi la sfera in M. E queſto cono avrà alla sfera una proporzione razionale, nè ſarà d' uopo di un lungo calcolo a dimoſtrarlo.

AN-

ANNOTAZIONE VIIII.

Ma tornando a ciò, che il Teorema noſtro ne inſegna, io dico, che, ſe il cono B V L (Fig. 6.) che fino ad ora abbiamo ſuppoſto aver la baſe B L circolare, ſi prolungherà indefinitamente in K, e ſi taglierà a traverſo con un piano G K, il qual tocchi la sfera in N, formandoſi per ciò un cono G V K, la cui baſe ſarà un' ellisse; queſto cono G V K ſarà egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſso alla ſuperficie della sfera.

ANNOTAZIONE X.

E Se il cono B V L (Fig. 6.) ovvero il G V K ſarà tagliato dalla parte della ſommità V con un piano E F, il qual tocchi la sfera in I; ſicchè del cono B V L reſti il pezzo B E F L B, ovvero del cono G V K il pezzo G E F K G, sì l' uno come l' altro di queſti pezzi ſtarà alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

E ſarà perpetua queſta proporzionalità, per quanto il cono, o l' uno, o l' altro de' ſopraddetti due pezzi ſi tagli con altri, ed altri, ed altri piani in infinito; così veramente, che ognuno di queſti piani tocchi la sfera. Imperocchè quel pezzo informe di cono, che avanzerà intorno alla sfera, chiuſo da una ſuperficie conica, tagliata in mille guiſe, e da tanti piani, quanti ſe ne vorranno, ſtarà pur ſempre alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

Egli

Egli è ſempre quello ſteſſo Teorema, e quella ſteſſa dimoſtrazione, che ci ſegue per tutto.

Intorno ad altri Solidi

ANNOTAZIONE XI.

VI ſon de' ſolidi, che non ſono nè cilindri, nè coni, ma ſi compongono dell' una, e dell' altra forma. A queſti pure, ove ſieno circoſcritti alla sfera, ſi eſtende il mio Teorema. Io ne proporrò quì alcuni eſempj, più toſto, ſecondo che mi verranno nell' animo, che ſeguendo un certo ordine.

Sia un ſemicircolo A N T (Fig. 7.) centro C, diametro A T. Prendaſi ſu queſto diametro qualſiſia punto Q, e guidiſi la Q R perpendicolare al diametro A T, ed eguale al raggio del ſemicircolo; e quindi guidata la tangente R B, che incontri la A B, perpendicolare al diametro, in B; guidiſi l' altra tangente R V, che incontri il diametro A T prolungato fino in V. Se noi faremo. che intorno alla linea A V ſi rivolgano inſieme il ſemicircolo A N T, e il trapezio ABRV, formeraſſi per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione del trapezio un ſolido circoſcritto alla sfera iſteſſa, compoſto di un cilindro, nato per la rivoluzione del rettangolo B Q, e d' un cono, nato per la rivoluzione del triangolo Q R V. E queſto ſolido cade egli pure ſotto il noſtro Teorema, e ſta alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

Che

Che ſe il punto Q ſarà preſo per modo, che la proporzione di C Q al raggio del ſemicircolo ſia razionale; razionale altresì ſarà la proporzione del ſolido alla sfera. Un breve calcolo lo dimoſtrerà.

ANNOTAZIONE XII.

SIA un ſemicircolo A N T (Fig. 8.) centro C, diametro A T. Prendanſi ſu queſto diametro due punti Q, ed S, quali che eſſi ſieno, l' uno di là, l' altro di quà dal centro. Indi ſi guidino le due Q R, S L perpendicolari al diametro, ed eguali ognuna al raggio del ſemicircolo. Ciò fatto, e guidata la R L, che toccherà il ſemicircolo in N, ſi guidino le due tangenti R V, L H, che incontrino il diametro A T prolungato in V, ed H. Se noi faremo, che intorno alla linea V H rivolganſi inſieme il ſemicircolo A N T, e il trapezio V R L H, formeraſſi per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione del trapezio un ſolido circoſcritto alla sfera iſteſſa, compoſto di un cilindro, nato per la rivoluzione del rettangolo L Q, e di due coni, nati per la rivoluzione de' due triangoli Q R V, S L H. E queſto ſolido viene egli pure ſotto il noſtro Teorema, e così ſta alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

E ſe i due punti Q, S ſaranno preſi per modo, che tanto C Q, quanto C S abbia al raggio del ſemicircolo una proporzione razionale; anche il ſolido avrà una prôporzione razionale alla sfera.

AN-

ANNOTAZIONE XIII.

SIA un ſemicircolo A N T (Fig. 9.) centro C, diametro A T. Prendaſi ſu queſto diametro qualſiſia punto Q, e guidiſi Q R perpendicolare al diametro, e più lunga, che il raggio del ſemicircolo; indi ſi guidino le due tangenti R V, R H, che incontrino il diametro A T prolungato in V, ed H. Se noi faremo, che intorno alla linea V H rivolganſi inſieme il ſemicircolo A N T, e il triangolo V R H, formeraſſi per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione del triangolo un ſolido circoſcritto alla sfera, compoſto di due coni, nati per la rivoluzione de' due triangoli Q R V, Q R H. Io chiamerò queſto ſolido *biconico*.

Egli è certo, che variando a piacere le due lunghezze C Q, Q R, potranno circoſcriverſi alla medeſima sfera infiniti *biconici* tutti tra loro diverſi. Tacquet ne conſiderò uno, il quale ſi forma con queſte due condizioni; la prima ſi è, che C Q ſi prenda eguale a zero, che vale a dire, che il punto Q ſi prenda in C; l' altra ſi è, che la Q R ſi faccia di quella lunghezza appunto, che ſi ricerca, perchè l' angolo V R H ne venga ad eſſer retto. E queſto *biconico* chiamò egli rombo quadrato, e dimoſtrò ingegnoſiſſimamente, che eſſo ſta alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Il Teorema da noi propoſto abbraccia queſto *biconico* ancora, ſenza però abbracciarne le condizioni, eſtendendoſi egualmente a tutti ſenza eccezione niuna. E' dunque ogni *biconico* a quella sfe-

sfera, cui è circoſcritto, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Io torno ſempre al mio Teorema; perciocchè egli è tanto univerſale, quanto altro mai foſſe; ed oltre a ciò breviſſimo, e faciliſſimo. Quelli, che hanno voglia di calcolare, potran leggiermente dimoſtrare e queſto ſteſſo; che abbiamo ora detto di tutti i *biconici*, ed altre propoſizioni ancora ſopra notate, per via di ſupputazioni proprie, e particolari, nelle quali il mio Teorema non averà parte alcuna.

Il chiariſſimo Tacquet trovò, che quel ſuo *biconico* ſta alla sfera, cui è circoſcritto, come ſta nel quadrato la diagonale al lato. Proporzione vaga; ma ſarebbe più comoda, ſe foſſe razionale? Ora noi, che non un ſolo *biconico*, ma infiniti ce ne abbiamo propoſti, potremo ſcegliere quanti ne piaccia, i quali abbiano alla sfera una proporzione razionale, il che faremo certamente, ſeguendo queſte due condizioni: prima, che le due linee C Q, Q R abbiano ognuna al raggio del ſemicircolo una proporzione razionale; poi, che eſſendo la ſomma de' due quadrati di C Q, e Q R differente dal quadrato del raggio, ſia queſta differenza un numero quadrato; delle quali due condizioni, la prima quaſi ſenza artificio niuno, la ſeconda con pochiſſimo conſeguiremo.

ANNOTAZIONE XIIII.

IO farò quì una annotazione, la quale di tanto ſi allarga, che ne comprende moltiſſime anche di quelle, che abbiamo già fatte; nè è però da tralaſciarſi, eſſendo di una maraviglioſa eſtenſione.

Sia

Sia un circolo, il cui centro T, a cui ſia circoſcritto un qualſivoglia poligono A B C D E (Fig. 10.) ovvero deſcritto all' intorno un poligono A B C D E F G H I K (Fig. 11.) di quella maniera, che l'abbiamo propoſto nell' Annotazione ſeconda del primo Teorema. Se egli ſi condurrà per lo centro T una rerta linea X Z, che traverſando il circolo, e il poligono, gli divida in due parti, e faremo, che intorno a queſta linea X Z rivolganſi inſieme il ſemicircolo, e l'una, e l' altra parte, qual più piacerà, del poligono diviſo; egli ſi formerà per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione della parte del poligono, condotta in giro, un ſolido intorno alla sfera. E ſarà queſto ſolido alla sfera così come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Lo ſteſso Teorema, e la ſteſsa dimoſtrazione, che ci hanno ſeguito in tutte le altre Annotazioni, ci tengono dietro anche in queſta.

Io non mi eſtenderò più oltre a cercare altri caſi, e, per così dire, altri aſpetti del mio Teorema; tanto più, che egli ſi volge da ſe medeſimo in tante guiſe, che e' par difficile volerle ridur tutte ſotto certi capi, ſenza che nè sfuggano infinite. E a Voi già, Monsignore, i voſtri graviſſimi affari, e i voſtri ſtudj più ſublimi non permetteranno di impiegare più lungo tempo in queſte mie bagattelle; le quali però non ſaranno già bagattelle per me, ſe potrò luſingarmi, che Voi le abbiate gradite, e riconoſciuto nell' offerta, che ve ne faccio, quell' infinito oſsequio, con cui mi dico.

LETTERA
DI D. FELICE LUIGI BALASSI C. R. DEL SALVATORE
AL CHIARISSIMO SIGNOR
FRANCESCO MARIA ZANOTTI
PUBBLICO LETTORE DI FILOSOFIA NELL' UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E SEGRETARIO PERPETUO DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELLA MEDESIMA CITTA'.

MEntre io con ſommo piacere leggeva il belliſſimo Opuſcolo, che recitaſte, non ha gran tempo, nell' Accademia delle Scienze di queſta Città, mi venne in mente ciò, che una volta oſſervai in una Annotazione del Tacquet, che trovai nel libro intitolato *Teoremi ſcelti di Archimede*, in cui parla di certi Anelli, frà la ſuperficie de' quali, dice, aver ritrovata la medeſima ragione, che paſſa frà

eſſi.

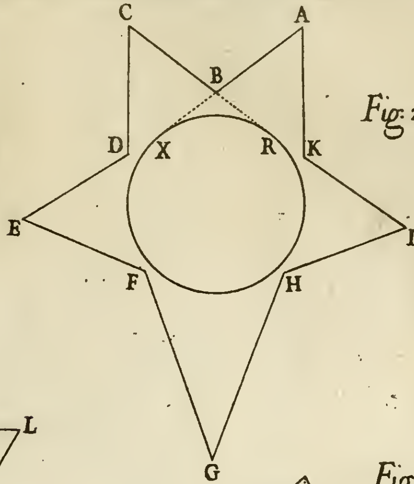
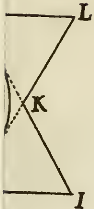


Fig. 2.



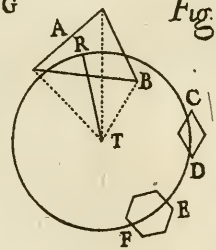


Fig. 4.

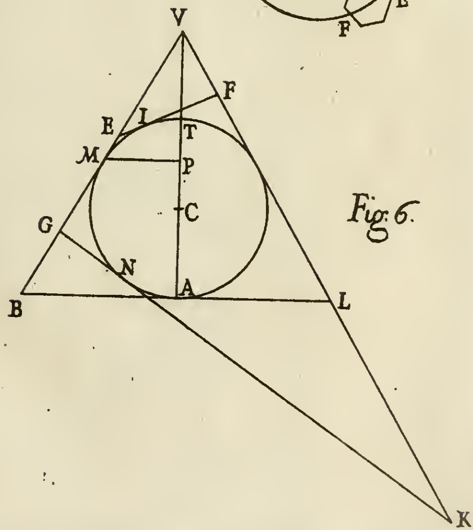


Fig. 6.

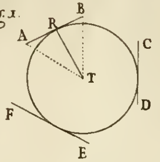


Fig. 1.

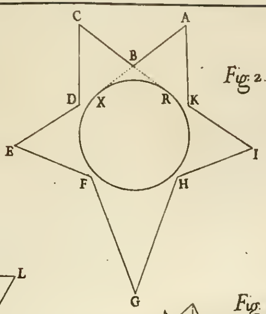


Fig. 2.

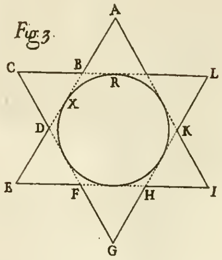


Fig. 3.

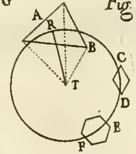


Fig. 4.

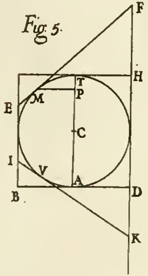


Fig. 5.

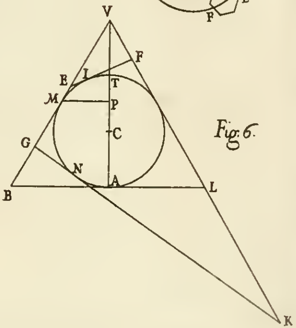


Fig. 6.

Fig. 8.

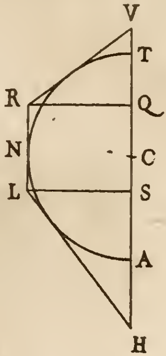
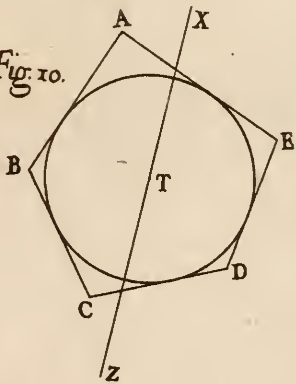




Fig. 10.



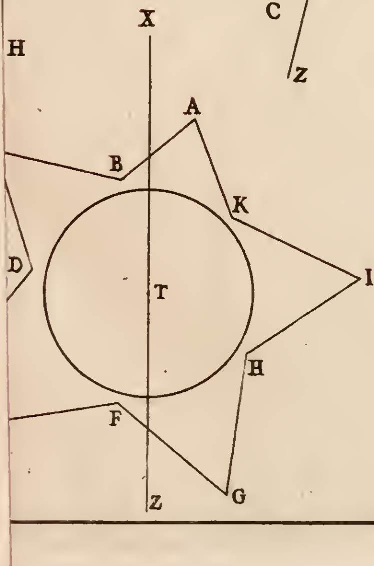


Fig: 7.

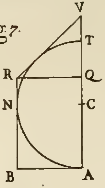
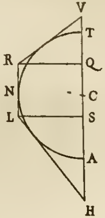


Fig: 8.



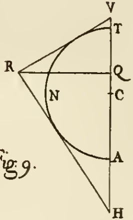


Fig: 9.

Fig: 10.

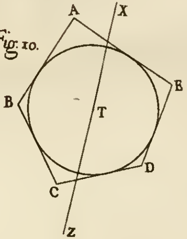
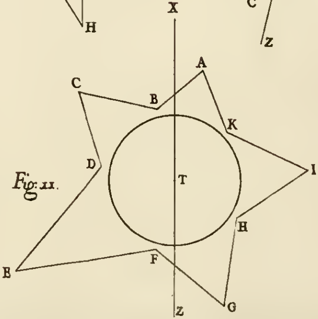


Fig: 11.



eſſi. Il che mi ha dato occaſione di penſare a quello, che potrebbe ſeguire, ſe foſſe uno di queſti circolare, e l' altro poligonare; ma però tale, che il poligono generante detto anello, poteſſe circoſcriverſi al circolo, o foſſe realmente circoſcritto. Chi sà, io frà me ſteſso diceva, che quello, che da voi è ſtato dimoſtrato de' poligoni al circolo, e de' ſolidi circoſcritti alla sfera, non poſsa ancor dimoſtrarſi degli anelli poligonari circoſcritti a circolari, voglio dire di quegli anelli. che ſono generati da un poligono, e da un circolo, che ſia inſcritto al poligono; mentre e l' uno, e l' altro con certa legge da una linea intorno ad un altra vien trasferito? In fatti ho finalmente ſcoperto, che la coſa non va altrimenti da quello, che io mi era ideato. Ora eſſendo a me ben noto, che allora quando intraprendeſte a meditare ſopra i poligoni circoſcritti al circolo, e ſopra i ſolidi circoſcritti alla sfera, voſtro intendimento fu di rendere più generale il Teorema di Archimede, in cui dimoſtra eſsere ſimilitudine di ragione frà la sfera, ed il cilindro a quella circoſcritto da una parte, e fra le ſuperficie di quella, e la ſuperficie di queſto dall' altra parte; ſiccome al medeſimo fine ſembrami tendere, ciò che io ho ricavato da due Teoremi di Andrea Tacquet: così ho giudicato, che a Voi non ſia per eſsere ſpiacevole vederne la dimoſtrazione. Che ſe poi non ſolamente foſse per non ſpiacervi, ma ancora per meritare alcun poco della voſtra approvazione, ciò e da me, e da qualunque giuſto ſtimator delle coſe aſcriveraſſi all' aver io procurato d' imitarvi ne' voſtri ingegnoſiſsimi Teoremi, non già all' avervi io in realtà imitato; poichè, e lo confeſso ſinceramente,

i voſtri grandiſsimi avanzamenti sì nelle ſcienze ſiloſofiche, e geometriche, come nelle belle arti, ſono bensì capaci d' eſsere lodati, ma non già d' eſsere imitati. Qual coſa adunque abbia io ottenuto nel procurar di ſeguirvi nell' ultimo voſtro ingegnoſiſſimo ritrovamento, a Voi s' aſpetta il giudicarlo, mentre vi degnerete di dare un' occhiata alla dimoſtrazione, che quì ſoggiungo.

L E M M A I.

SIa una linea A B (Fig. 1.) che tagli una ſigura piana qualunque H F, queſta linea A B ſi rivolga per un piano intorno alla A V perpendicolare a queſto piano, e in tal rivoluzione porti ſeco la ſigura H F ſempre perpendicolare al detto piano; da tal rivoluzione naſcerà un anello, che ſarà eguale alla ſigura H F moltiplicata per la circonferenza deſcritta dal centro di gravità di detta ſigura intorno alla linea A V, come dimoſtra Tacquet nel Libro V. degli Anelli, e de' Cilindri alla Propoſizione V.

L E M M A II.

POſte le medeſime coſe, la ſuperficie dell' anello ſarà eguale al perimetro della ſigura H F moltiplicata per la circonferenza, che deſcrive il centro di gravità del perimetro della detta ſigura intorno alla A V. Così il medeſimo Tacquet nell' iſteſſo libro alla Propoſizione XIX.

PRO-

PROPOSIZIONE.

SE intorno ad A V, (Fig. 2.) ſi rivolgeranno alla maniera ſuddetta due ſigure piane H F, X Z, e ſia H F ad X Z come il perimetro di H F al perimetro di X Z e ſiano i centri di gravità sì della ſigura, come del perimetro egualmente diſtanti da A V, gli anelli deſcritti dalla rivoluzione delle due ſigure H F, X Z ſtaranno come le loro ſuperſicie.

La ſigura X Z pongaſi eguale ad mm, il di lei perimetro eguale a p; la circonferenza, che deſcrive il centro di gravità della medeſima chiamiſi C; la ſigura H F chiamiſi nn, la circonferenza, che deſcrive il di lei centro di gravità pongaſi eguale ad e, ſarà per la ſuppoſizione $\frac{pnn}{mm}$, cioè la quarte proporzionale dopo mm, nn, ep il perimetro della ſigura piana H F. Ora ſi moltiplichi mm per la circonferenza deſcritta dal centro di gravità della ſigura X Z, e nn per la circonferenza, che deſcrive il centro di gravità di H F: ſarà per il primo Lemma l' anello generato dalla ſigura X Z eguale ad mmc, e l' anello generato dalla ſigura H F ſarà nne. Dipoi ſi moltiplichi il perimetro della ſigura X Z, cioè p per c, ed il perimetro della ſigura H F, cioè $\frac{pnn}{mm}$ per e; e ſarà per il Lemma ſecondo pc la ſuperſicie dell' anello generato dalla ſigura X Z, e $\frac{pnne}{mm}$ la ſuperſicie dell' anello generato dalla ſigura H F; Ma ſtà mmc ad nne come pc ad $\frac{pnne}{mm}$, come è per ſe ſteſſo chiaro. Dunque

 l' anel-

l' anello all' anello ſtà come la ſuperficie alla ſuperficie nelle figure, l' aree delle quali ſeguono la proporzione de' loro perimetri.

COROLLARIO I.

DI quì raccoglieſi la dimoſtrazione del mio Teorema, che poc' anzi vi ho accennato. Imperciocchè ſe le due figure ſaranno una un circolo, l' altra un poligono o circoſcritto, oppure capace di eſſere circoſcritto al circolo medeſimo, e il centro di gravità della figura ſia lo lo ſteſſo, che il centro di gravità del perimetro (il che deve ancor dirſi degli anelli generati da un poligono, di cui i lati prodotti ſieno tangenti del circolo come (Figura 3.) E D C B A Q) l' anello circolare, e l' anello poligonare ſtaranno come le lor ſuperficie, eſſendoſi già da voi chiaramente dimoſtrato, che il circolo, ed il poligono circoſcritto ſono come i loro perimetri.

COROLLARIO II.

ALla dimoſtrata propoſizione riduconſi ancora come caſi particolari le propoſizioni del Tacquet, delle quali parla nell' accennata Annotazione frà i Teoremi ſcelti di Archimede, che ſono riſtrette a figure ſimili ed eguali. Le propoſizioni, ch' egli nomina in detta Annotazione ſono la 13, 14, e 15. del lib. 4. degli Anelli, e de' Cilindri. La prima è, che gli anelli generati da figure ſimili ed eguali ſono tra di loro così di ſolidità, come di ſuperficie. La ſeconda è, che l' anello aperto è triplo del ſuo vicino, purchè ſia chiuſo, ed ambedue generati ſieno da

figure

ſigure ſimili ed eguali. La terza, che ſe vi ſarà una ſerie di anelli contigui generati da figure ſimili, ed eguali, de' quali il primo ſia chiuſo, ſtaranno tra di loro, cominciando da queſto, come la ſerie de' numeri diſpari, della quale il primo termine ſia l'unità, cioè come 1, 3, 5, 7, 9. &c. La ragione della propoſizione mIII. è per ſe ſteſſa evidente preſuppoſta la mia propoſizione. Eccovi delle altre due la dimoſtrazione. Sia (figura IV.) queſta ſerie di figure A B C D ſimili ed eguali, le quali girino con la linea G A intorno al punto A, che ſuppongo nel perimetro della figura D, affinchè il primo anello ſia chiuſo (poichè il ſopranominato Tacquet chiama l' anello chiuſo allora quando il punto della rivoluzione è nel perimetro della figura generante, ed aperto quando è fuori, come ſarebbe il medeſimo punto A riſpetto alla figura C, oppure B); il centro di gravità della figura A ſia G, quello della figura B ſia g, quello della figura C ſia m, e finalmente quello della figura D ſia m. Si chiami A $m = a$ E $m = b$. Poichè gli anelli generati da queſte figure ſono tra di loro come le periferie deſcritte da centri di gravità; dunque ſaranno come i raggi di queſte periferie, e per tanto il primo al ſecondo ſarà come $a : 2a + b$, il ſecondo al terzo, come $2a + b : 3a + 2b$, il terzo al quarto come $3a + 2b : 4a + 3b$ ec. Adunque gli anelli generati da figure ſimili, ed eguali ſono tra di loro, cominciando da quello che è chiuſo, come i termini di queſta ſerie aritmetica, di cui il primo termine è a, il ſecondo $2a + b$, il terzo $3a + 1b$. il quarto $4a + 3b$. Ciò ſuppoſto ſi fa manifeſto quello, che dice il Tacquet nelle propoſizioni 14, e 15. del ſud-

 detto

detto libro, nelle quali parla di quegli anelli i quali o ſono deſcritti da figure, delle quali i centri di gravità, o ſono i punti che ſegano in due parti eguali le linee E A, E H ec. o pure ſono in una retta, la qual ſega in due parti eguali, e perpendicolarmente le dette E A, E H. Imperciocchè in queſto caſo la ſerie a, $2a \dagger b$, $3a \dagger 2b$, $4a \dagger 3b$ ſi cangia in queſta a, $3a$, $5a$, $7a$, ec. Ora eſſendo il primo anello chiuſo al ſecondo in queſto caſo come $a : 3a$, è manifeſto che l'anello C contiguo al chiuſo D ſarà di queſto triplo, e denotando a il primo anello chiuſo, cioè D; $3a$, il ſecondo, cioè C, $5a$ il terzo, cioè B ec. è manifeſto, che in queſto caſo ſaranno gli anelli come la ſerie de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9. ec. ed in queſta ragione ancora ſaranno le lor ſuperficie.

Eccovi dimoſtrato il mio Teorema, il quale però ſi dee piuttoſto dir voſtro, che mio; poichè l' ho ritrovato ſeguendo le voſtre traccie. A voi perciò lo invio; il qual come gentiliſſimo, che ſiete anzi pure la gentilezza medeſima, ſpero, che qualunque egli ſiaſi, lo gradirete, e lo avrete come un contraſſegno di quell' altiſſima ſtima, che faccio di voi, e colla quale mi dichiaro ec.

SOPRA

SOPRA ALCUNE NUOVE PROPRIETA' DELLE FIGURE QUADRILATERE DISSERTAZIONE

DEL CONTE

GREGORIO CASALI BOLOGNESE

PROFESSOR SOSTITUTO DI ARCHITETTURA MILITARE

ED ACCADEMICO DELL' ISTITUTO DELLE SCIENZE E DELL' ARTI

DETTA NELL' ACCADEMIA

Alli 10. *di Aprile* 1749.

VI ragionai, ha pochi anni, ſe ben vi ſovviene, o Accademici dottiſſimi, di certe proprietà nuove per buona parte, e tutte ſenza dubbio non affatto diſutili delle figure quadrilatere; altre appreſſo, andando dietro ad una certa analogia, ne ho cercate e ſcoperte, alcune delle quali forſe nel venturo anno, ed alcune queſta ſera medeſima, quando non vi ſia grave, mi piace di dimoſtrarvi.

Data una ſigura quadrilatera qualunque ella ſiaſi (Fig. 1.) A B C D, ſe dal punto E medio del lato A D ſi condurranno ad F medio del lato A B la linea E F, & ad H medio del lato D C la linea E H, e dai punti F, ed H le linee F G, H G al punto G medio del lato B C, l'area inſcritta E F G H ſarà un paralellogramo metà della circonſcritta ſigura, o paralellogramo, od altro che ella ſiaſi, A B C D. Queſto è ciò che per varie propoſizioni e da non pochi corollari ſeguito nell' antica Diſſertazione mi vi feci a dichiarare.

Il Robervalle diſcoperſe già prima queſto teorema. Ciò ne è riferito, e ne è data la dimoſtrazione dal De la Hire negli Atti dell' Accademia Reale, dove egli parla de' trapezj. Io mi conduſſi a provarlo per una via più facile e piana, che non ferono il Robervalle, e il De la Hire, e varie coſe aggiugnendovi mi parve di penetrare qualche poco più a dentro negli arcani della verità. Ecco perchè, io credetti che non fuſſe diſconveniente, che ne parlaſſi alla noſtra Accademia. Non intendo già di offendere in niun modo la gloria di que' valentiſſimi Autori abbaſtanza chiara e famoſa: ſenza di che, ſe male i più non s'avviſano, non ſuol diſpiacer punto ai Franceſi, per un certo vago, anzi pur lodevole, amor d' invenzione, che gli altri affermino di aver detto un po' più di loro, purchè non ſi contenda, che eſſi abbiano detto qualche coſa prima degli altri.

Da tali conſiderazioni pertanto ſono ſtato tratto ad eſaminar, che avverrebbe ſe ſi voleſſe inſcrivere bensì (e mi ſi laſci uſare queſto termine inſcrivere, comecchè io non l' uſi troppo propriamente) inſcriver, dico, in qualche quadrilatero

tero una nuova figura; ma ne piaceſſe lo inſcriverla di queſta maniera: cioè a dire (Fig. 2.) dal punto E medio di A D conducendo alle eſtremità B, ed C del lato oppoſto B C le due linee E B, E C, e dal punto G medio del lato B C ad A, & D eſtremi del lato A D le linee G A, G D. Ho ſcoperto in queſta nuova inſcritta E I G L alcune proprietà, ma non quante avrei pur voluto ſcoprirne. Mi reſtava qualche coſa da deſiderare, e la difficoltà mi ha fatto oſtacolo, e mi ha trattenuto; per la qual coſa ho ſerbata queſta materia al futuro anno, ſe mi giovi lo ſperarlo più del preſente favorevole, e propizio.

Mi ſon dato finalmente ad oſſervare una terza maniera d' inſcriver figure ne' quadrilateri. Ho penſato (Fig. 3.) che da un' angolo di un quadrilatero ſi ponno condurre due linee ai punti medj de' lati, che ſi congiungono nell' angolo oppoſto; e da queſto ſecondo angolo due altre linee ai punti medj dei lati, che ſi congiungono nel primo angolo. Queſta nuova inſcritta non mi è ſtata così auſtera come l' altra, e mi ſi è diſcoperta più volentieri. Di queſta inſcritta dunque, materia, ſe mal non mi appongo, tutta pur nuova, tutta pur mia, vi parlerò al preſente, ſe voi lo mi permettete; lo che cercherò di fare, e con tanto di chiarezza quanto non ne ſia tolta la brevità, e con tutta quella brevità, onde non ne reſti la chiarezza diſturbata ed ingombra.

Sia data (Fig. 3.) la figura A B C D quadrilatera qualunque ella ſiaſi.

Si notino i punti medj dei lati: cioè i punti E, F, G, H.

Dal punto D apice dell' angolo A D C ſi conduca ad F la linea D F, ed a G la linea D G.

Pari-

Parimente dal punto B apice dell' angolo A B C ſi conduca ad E la linea B E, e ad H la linea B H.

Lo che fatto dico io primieramente, che la figura inſcritta B L D I è quadrilatera. Ma ciò per mio avviſo è troppo chiaro, e non ha biſogno di dimoſtrazione. Il punto D, onde facendo angolo ſi partono le linee D F, e D G, il punto B, onde ſi partono la B E, e la B H pure facendo angolo, e lo interſecarſi di queſte quattro linee a due per due, facendo per neceſſità due altri angoli oppoſti e ſalienti, lo dimoſtrerebbe con molta facilità.

Fra tanto paſſando oltre, oſſervate meco, vi prego, che queſto quadrilatero inſcritto è la terza parte del ſuo circonſcritto. Se tutta l' area

A B C D $= a$, l' area B L D I $= \frac{a}{3}$

Dall' uno all' altro dei due punti B e D ſi conduca la diagonale B D, la quale dovrà dividere ſenza dubbio tutta l' area quadrilatera A B C D ne' due triangoli A B D, D B C, che ogni figura rettilinea in tal numero di triangoli ſi divide, quale è il numero della categoria, in che eſſa ſi ritrova, o veramente quale è il numero de' ſuoi angoli, o de' ſuoi lati men due.

La diagonale B D dividerà ancora per la medeſima ragione l' area B L D I ne' due triangoli I B D, D B L.

Mi ſia dunque lecito il prendere ſeparatamente una di queſte porzioni triangolari della figura A B C D, come ſarebbe (Fig. 4.) il triangolo A B D, che tragge pur ſeco, e quaſi a ſe ſovrapoſto il triangolo I B D porzione della figura inſcritta.

Dimo-

Dimoſtrerovvi ora che $IBD = \frac{ABD}{3}$.

$ADF = FDB$ perchè di baſi, e di altezze eguali.

Si tiri la linea AI.

$AIF = FIB$, perchè pure di baſi, e di altezze eguali.

Or ſe levando da quantità eguali quantità parimente eguali, i reſidui ſono eguali; dico che $ADF - AIF = FDB - FIB$, che è lo ſteſſo che dire $ADI = IBD$.

Se in vece di conſiderare $ADF = FDB$, ſi conſideri più toſto $ABE = EBD$ verrà a dimoſtrarſi $ABI = IBD$.

Dunque $ADI = ABI = IBD$: dunque $IBD = \frac{ABD}{3}$.

Ora tornando a' quadrilateri abbiamo (Fig. 3.) nel trapezio ABCD per la condotta diagonale l' oſſervato triangolo ABD, del quale il triangolo IBD è la terza parte.

Per le ſteſſe ragioni ove ſi riguardi il triangolo BCD, nè ſarà eguale alla terza parte il triangolo DBL.

Ma ſe i terzi delle parti preſi tutti inſieme ſono eguali al terzo del tutto, lo che è verità di principio, eccovi dimoſtrato che BLDI è la terza parte di tutto il quadrilatero ABCD. Sia dunque $ABCD = a$, e ſarà allora $BLDI = \frac{a}{3}$.

Eccovi dimoſtrata queſta teoria univerſalmente; ora mi ſi permetta l' eſaminarne un caſo particolare.

Sia dato (Fig. 5.) il triangolo BCD, o a meglio

dire

dire ſia dato per eſſo un trapezio A B C D, ove il lato A B è infinitamente piccolo.

Inſcrivaſi per egual modo in queſto trapezio la nuova figura.

Dall' angolo A B C formato dal lato infinitamente piccolo A B, e dal lato B C, ſi conduca una linea al punto medio di A D; ma queſta per la infinita adeſione ſi confonde con la ſteſſa A D: poi dall' angolo medeſimo A B C ſi conduca la linea B H.

Dall' angolo A D C oppoſto all' A B C ſi conduca una linea al punto medio del laterculo A B; ma queſta ancora per la infinita adeſione ſi identifica con la A D: poi dall' angolo medeſimo A D C ſi conduca la linea D G.

Ora dico io, anzi vi ho già ſopra fatto vedere e provato che lo ſpazio D A L, o ſia D B L, che adeſſo è la figura inſcritta, è la terza parte della circonſcritta A B C D.

Queſta è dunque una maniera molto comoda, onde avere la terza parte di qualſivoglia figura quadrilatera, lo che per mio avviſo non voleva tacerſi; poichè le terze parti non ſono poi le aliquote più facili da ritrovarſi.

Ma abbaſtanza dell' area di queſta inſcritta.

Sin quì vi ho detto dello ſpazio di queſta figura: rimane ora a parlarvi della figura di queſto ſpazio.

Se la figura, entro cui ſi vuole inſcriver l' altra, ſarà paralellogramo, e paralellogramo ſarà l' altra; ſe al contrario l' una, ancor l' altra al contrario.

Sia (Fig. 6.) A B C D paralellogramo, dico che B L D I lo ſarà eſſo pure.

E D, e B G ſono egualmente lunghe, ed egualmente inclinate, dunque B E, e D G ſono paralelle.

F B, e D H ſono egualmente lunghe, ed egualmente inclinate, dunque D F, e B H ſono paralelle.

Dunque

Dunque finalmente B L D I ſarà paralellogramo.

Se poi la circoſcritta non ſarà paralellogramo, non potrà eſſerlo ne meno la inſcritta. E ciò, perchè ſiccome la figura inſcritta, la quale ſia paralellogramo vuole nella ſua circonſcritta lati oppoſti eguali ed egualmente inclinati, così non potrà formarſi, che nelle circonſcritte, le quali ſieno ancor eſſe paralellogrami; per la qual coſa ogni trapezio, che vorrà dentro di ſe qualche altra figura inſcritta, biſognerà che ſi contenti di cercarla fra le irregolari affatto, com' egli è.

Ora perchè i paralellogrami ſono vari, ne dirò qualche coſa di ciaſcheduna ſpecie.

Ponno i paralellogrami eſſere quadrati, rettangoli, romboidi, rombi, ed in ciaſcheduno di queſti paralellogrami ſi ponno inſcrivere nuove figure, e ſaranno ancor eſſe o quadrati, o rettangoli, o romboidi, o rombi.

Se la figura data ſarà il quadrato (Fig. 7.) la figura inſcritta ſarà il rombo.

Se la figura data ſarà il rettangolo, la (Fig. 8.) la figura inſcritta ſarà il romboide.

Se la figura data ſarà il romboide, (Fig. 9.) biſognerà diſtinguerne alcuni caſi. Quando la diagonale più piccola ſarà eguale ad un terzo della più grande, la figura inſcritta ſarà il rettangolo; cioè a dire nel romboide ſi avrà il rettangolo inſcritto, quando $BD = \frac{AC.}{3}$ Quando poi (Fig. 10.) alla diagonale più piccola biſogni o aggiugnere o levar qualche coſa per farla eguale ad un terzo della diagonale più grande, allora la inſcritta ſarà ancor eſſa il romboide; cioè a dire nel romboide ſi avrà il romboide inſcritto quando $BD + y = \frac{AC}{3}$; o veramente quando $HF - y = \frac{EG.}{3}$

Se la figura data ſarà il rombo (Fig. 11.) biſognerà

rà diſtinguerne alcuni caſi. Quando la diagonale più piccola ſarà qualche coſa di più o di meno della terza parte della diagonale più grande, la figura inſcritta ſarà il rombo; che è lo ſteſſo che dire: nel rombo ſi avrà il rombo inſcritto, quando $BD + y = \frac{AC}{3}$; o pur quando $HF - y = \frac{EG}{3}$.

Quando poi la diagonale più piccola (Fig. 12.) ſia eguale alla terza parte della diagonale più grande, la inſcritta ſarà il quadrato; che è io ſteſſo che dire nel rombo ſi avrà il quadrato inſcritto, quando $BD = \frac{AC}{3}$.

Non mi è paruto bene il recare minutamente innanzi a voi le dimoſtrazioni di queſti teoremi, perchè, oltre che io ſarei ſtato men breve di quello che mi ſon propoſto, ſono elleno aſſai facili e piane; ed io sò beniſſimo che molte volte gl' ingegni dotti e vivaci ſi annojano e s' inquietano delle troppo facili dimoſtrazioni.

Vi dirò ſolo, che io ho cercate queſte verità ſupponendo prima (Fig. 7. 8. 9. ec.) la figura inſcritta; indi prolungandone i lati così, che poteſſero poi venire a terminare nei punti medj de' lati della circonconſcritta, dove foſſe queſta in appreſſo formata.

La coſa non mi è ſtata molto difficile, dopo che ebbi ſcoperto, che il lato della figura inſcritta (Fig. 3.) ha una ragione coſtante a quel reſto di linea, che è fra eſſo, e il punto medio del lato della circoſcritta, e che la ragione è di 2. ad 1.

La dimoſtrazione ne è breve.

Dalla figura (Fig. 3.) A B C D diviſa dalla diagonale B D ſi levi nuovamente (Fig. 13.) la porzione A B D.

Dico D I : I F :: 2 : 1.

Si conduca la linea E F.

B D, ed E F ſono paralelle, dunque B D : E F :: D A : E A; e D A : E A :: 2 : 1 per la ſuppoſizione, dunque B D : E F :: 2 : 1. Gli

Gli angoli E I F, ed B I D ſono eguali, perchè oppoſti nel vertice, ſono poi ſimili, i triangoli B I D, F I E perchè eſſendo fra due paralelle, hanno alle baſi gli angoli alterni eguali.

Per lo che ſaranno proporzionali i lati omologhi, ed in ragion delle baſi; così D I : I F : : D B : E F; e così pure D I : I F : 2 : 1.

Eccone dunque quella propoſizione, che mi ha ſervito di ſcorta, ed ecco in che maniera fingendo prima le figure inſcritte, mi è riuſcito per un metodo inverſo di rintracciare facilmente tutto ciò, che ho voluto.

Laſciatemi la libertà di eſclamare; bella veramente felicità de' Geometri! a quali è dato ſcoprire il vero per ogni via. Sono eſſi avvezzi ſempre a trattare con le eſſenze neceſſarie, in cui tanto vale la condizione quanto il condizionato, e ciò che era condizionato può diventar condizione. Così è loro il dire, ſe la ſomma degli angoli è uguale a due retti la figura è triangolo, come lo ſarebbe, ſe la figura è triangolo la ſomma degli angoli è ugnale a due retti. E certamente i Matematici anche tra le fatiche de' loro calcoli, e nelle eſtaſi delle loro meditazioni, non ponno a meno di non riguardare ognora nell' idea dell' Ente neceſſario, per queſto vicendevole cambiamento di condizione, e di condizionato; che è lo ſteſſo affermare di lui, ſe egli eſiſte è poſſibile, o veramente ſe egli è poſſibile eſiſte.

Ma io non debbo ſcoſtarmi per vaghezza di Metafiſica dal mio argomento; o anzi pure dovrei al mio argomento medeſimo dar fine. Ho detto abbaſtanza di queſte circoſcritte, e della loro quantità, e della qualità loro.

Siami lecito ſolamente il dedurne due corollari.

Il primo è la maniera, con la quale, dato un quadrato, ſe ne può comporre un' altro o triplo, o ſubtriplo; ſubito, e facilmente. Si

Si avrà triplo, quando (Fig. 12. ſi voglia conſiderare un quadrato come figura inſcritta.

Si trovi la media proporzionale tra la baſe, e l' altezza del paralellogramo circonſcritto.

Il lato del quadrato inſcritto, e queſta media proporzionale ſtaranno fra loro come 1 alla $\sqrt{3}$, e i loro quadrati come 1. a 3.

Si avrà poi ſubtriplo, quando (Fig.7.) ſi voglia conſiderare un quadrato come figura circonſcritta.

Si trovi la media proporzionale tra la baſe e l' altezza del paralellogramo inſcritto.

Il lato del quadrato circoſcritto, e queſta media proporzionale ſtaranno fra loro come 1 alla $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e i loro quadrati come 1 ad $\frac{1}{3}$.

Ma venghiamo all' altro corollario; che è forſe più degno di conſiderazione.

Dico io dunque, che non ſolamente in un quadrilatero ſi può inſcrivere un' altro quadrilatero, ma in queſto ſecondo (Fig. 14.) ſe ne può inſcrivere un terzo, nel terzo un quarto, nel quarto un quinto, e così in infiito.

Se lo ſpazio della prima figura foſſe eguale ad a, tutta la ſerie infinita delle figure ſi eſprimerebbe in queſto modo $\div\!\!\div\, a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ &c.

Ma ſiccome abbiamo dalla teoria delle ſerie geometriche infinite, che quando i termini decreſcono in ragion tripla, il primo è doppio della ſomma di tutti gli altri, così diremo nel caſo noſtro $\int \div\!\!\div\, a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ & c $= \frac{a}{2}$

Ora la metà di qualſivoglia quadrilatero ſi può avere inſcrivendo in eſſo alla maniera del Robervalle nuovo quadrilatero, (Fig 1.) il quale anzi ſarà ſempre paralel-

logra-

logramo, e perciò anche più agevolmente quadrabile.

Dunque conchiudo, ed ecco la propoſizione, che intendo di raccogliere; la ſerie infinita delle inſcritte (Fig. 14.) dagli angoli ai lati è uguale ad una ſola inſcritta (Fig. 1.) dai lati agli altri lati, onde queſta ſerie medeſima è chiaramente nota, e quadrabile facilmente.

Il Robervalle volendo formar le ſue inſcritte, diviſe per metà i lati delle circonſcritte, ed io pur nelle mie così feci: ora, dico io, non ſi potrebbe egli eſſere un po' più ardito, ed in vece di fermarſi ſolamente nelle metà de' lati, ſcorrere anzi per tutta la infinita ſerie delle numeriche frazioni? Chi sà qual bella ed elegante verità ne è promeſſa in mercede di queſta fatica? Ma queſta fatica a me è piaciuto di ſoſtenere, ed ecco la verità, che ne ho tratta.

Mi ſi conſenta di chiamare (Fig. 3.) l' angolo D A B, e l' angolo B C D gli angoli sfuggiti, come quelli, da cui ſta lontana la inſcritta; l' angolo poi A B C, e l' altro C D A dirò gl' angoli della diagonale. Mi è biſognato dar qualche nome a queſti angoli per amore di maggior chiarezza.

Si ponno prendere le frazioni dell' angolo sfuggito facendo $AF = \frac{AB}{2}$, $AE = \frac{AD}{2}$, $CH = \frac{CD}{2}$, $CG = \frac{CB}{2}$; ovvero $AF = \frac{AB}{3}$, $AE = \frac{AD}{3}$ ec. od $AF = \frac{AB}{4}$, $AE =$ ec. e così in infinito.

Si ponno prendere ancora le frazioni dall' angolo della diagonale facendo $BF = \frac{BA}{2}$, $BG = \frac{BC}{2}$, $DH = \frac{DC}{2}$, $DE = \frac{DA}{2}$; ovvero $BF = \frac{BA}{3}$, $BG = \frac{BC}{3}$, ec.; od $BF = \frac{BA}{4}$, $BG =$ ec. e così in infinito.

Lo che facendoſi per egual modo in ciaſcheduno dei

dei lati, e conducendoſi poi le linee F D, G D, E B, H B, ſi avrà ſempre nota la ragione della inſcritta qualunque ſiaſi, B L D I a tutta l'area A B C D.

Eccovi eſpoſta queſta ragione diſteſamente.

Sia frazione $=$ F; inſcritta $=$ I; area totale $=$ A.

Si prendano le frazioni dall' angolo sfuggito

$F = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1\,A}{3}$. $F = \frac{1}{3}$; $I = \frac{2\,A}{4}$. $F = \frac{1}{4}$; $I = \frac{3\,A}{5}$. $F = \frac{1}{5}$, $I = \frac{4\,A}{6}$. $F = \frac{1}{6}$; $I = \frac{5\,A}{7}$. ec.

Lo che fa vedere le inſcritte in una ſerie di rotti comincianti da $\frac{1}{3}$, e creſcenti in progreſſione aritmetica tanto ne' numeratori quanto ne' denominatori.

Si prendano le frazioni dall' angolo della diagonale.

$F = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1\,A}{3}$. $F = \frac{1}{3}$; $I = \frac{1\,A}{5}$. $F = \frac{1}{4}$ $I = \frac{1\,A}{7}$. $F = \frac{1}{5}$; $I = \frac{1\,A}{9}$. $F = \frac{1}{6}$; $I = \frac{1\,A}{11}$. ec.

Lo che fa vedere le inſcritte in una ſerie di rotti comincianti da $\frac{1}{3}$, e creſcenti ne' ſoli denominatori ſecondo i numeri impari della progreſſione aritmetica.

La dimoſtrazione di tutto ciò è chiariſſima, e non è molto diverſa da quella, onde ho provata già ſopra la inſcrita $= \frac{1}{3}$. Ma per darla più generale, (Fig. 4.) ſi A B D una porzione di quadrilatero diviſo dalla diagonale.

Dico; A D F : F D B : : A I F : F I B : A F : F B. E così dunque A D F—AIF : F D B—FIB : : A F : F B; che è lo ſteſſo che dire A D I : I D B : : A F : F B.

Ora ſia a cagion d' eſempio A F $= \frac{1}{5}$.

A F : F B : : 1 : 4, & A D I : I D B : : 1 : 4.

Dunque A D I $=$ 1; A B I $=$ 1 I B D $=$ 4; dunque finalmente I B D $= \frac{4\,A\,B\,D}{6}$.

Se ſi vorrà prendere una frazione, ove il numeratore ſia maggior di uno come ſarebbe $\frac{5}{7}$, $\frac{20}{22}$, $\frac{346}{489}$, ec.

la medeſima dimoſtrazione ſvolgerà con egual deſtrezza il problema.

Se la frazione foſſe polinomia come ſarebbe $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$; ciò non importa, che non ſi vuole altro ſtudio di più, che ridurre i termini alla medeſima denominazione; ed ecco l' $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} = \frac{2}{5}$.

Non ho ſegnate io altre ſerie d' inſcritte, ſe non ſe le due, ove il denominatore della frazione, cominciante o preſſo l' angolo sfuggito, o preſſo l' angolo della diagonale, è uguale ad uno; baſta bene che io abbia preſtato altrui modo, onde agevolmente trovarle tutte.

Ciaſcheduna di queſte inſcritte infinite e diverſe, ove ſi formi ne' paralellogrami, è paralellogramo ancor eſſa. Se v' ha cui piaccia indagare in quel paralellogramo ſi inſcriva il quadrato, in quale il romboide; e così degli altri, lo può egli trovare per il metodo inverſo prolungando il lato della figura inſcritta. Ove il numeratore della frazione ſia eguale ad uno, eccogli la ſerie de' prolungamenti.

Sia (Fig. 3.) D I lato della figura inſcritta $= L$, ed il ſuo prolungamento I F $= P$.

Si prendano le frazioni dall' angolo sfuggito.

$F = \frac{1}{2}$; $P = \frac{1}{2} L$. $F = \frac{1}{3}$; $P = \frac{1}{3} L$. $F = \frac{1}{4}$; $P = \frac{1}{4} L$. $F = \frac{1}{5}$; $P = \frac{1}{5} L$. $F = \frac{1}{6}$; $P = \frac{1}{6} L$. ec.

Lo che moſtra, che così le frazioni ſtanno ai loro tutti, come i prolungamenti a que' loro lati, da cui derivano.

Si prendano le frazioni dall' angolo della diagonale.

$F = \frac{1}{2}$; $P = \frac{1}{2} L$. $F = \frac{1}{3}$; $P = \frac{2}{3} L$. $F = \frac{1}{4}$; $P = \frac{3}{4} L$. $F = \frac{1}{5}$; $P = \frac{4}{5} L$. $F = \frac{1}{6}$; $P = \frac{5}{6} L$. ec.

Lo che da ne' prolungamenti una ſerie di rotti cominciante da $\frac{1}{2}$, e creſcente tanto ne' numeratori quanto ne' denominatori ſecondo la progreſſione aritmetica.

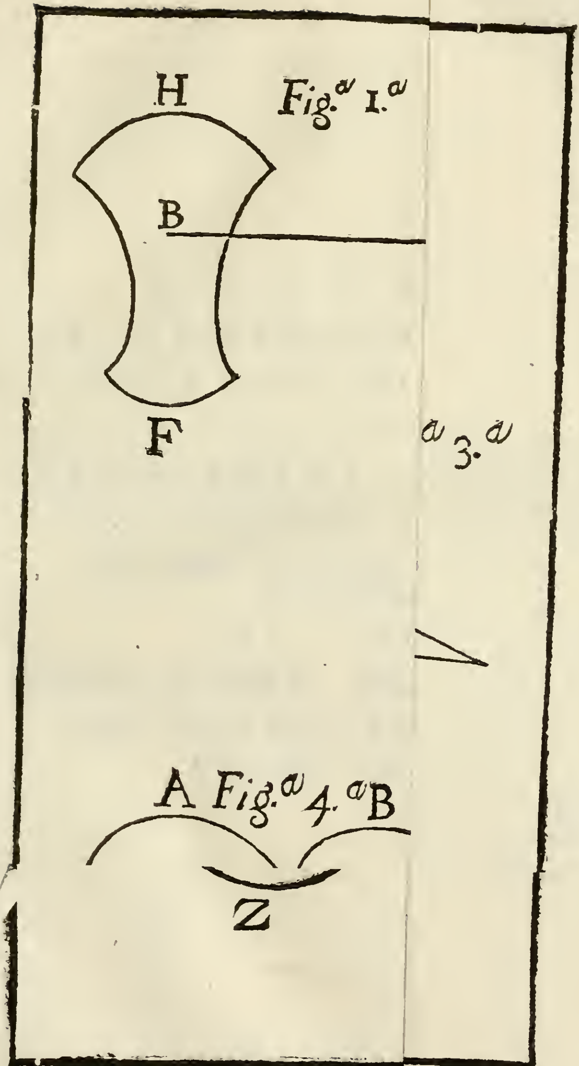
La dimoſtrazione, di che mi ſon ſervito, ove ho moſtrato (Fig. 13.) $IF = \frac{DI}{2}$, vale in ciaſcheduno di queſti caſi, e valerebbe anche ſe il numeratore della frazione, preſa o dall' angolo sfuggito, o dall' angolo della diagonale foſſe maggiore di uno, ed ancora quando la frazione foſſe polinomia.

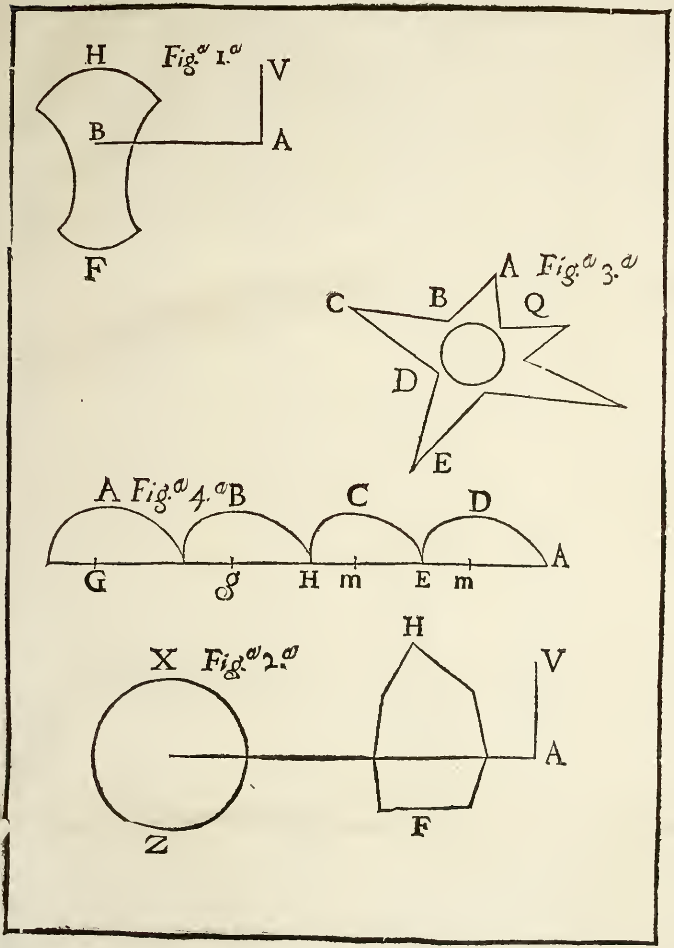
Ora chi non vede queſti teoremi da che prodigioſo numero di propoſizioni ſono accompagnati e ſeguiti? Che infinite maniere di conſtruir quadrati o maggiori, o minori di alcun dato! Che maraviglioſa ed interminabile quantità di ſerie tutte con agevolezza ſommabili, e che recano per così dire nelle noſtre mani quel sì terribile infinito tutto piacevole, e manſuefatto!

Ma io ho detto abbaſtanza, ſe non forſe anche troppo. Veramente ſu 'l principio non mi aſpettava di camminare ſi lunga ſtrada: ed ho quaſi rimorſo di non mi eſſere contentato di dire qualche coſa di meno; ma queſta è una colpa, che facilmente s' impara a commettere per poco, che ne piaccia uſare, e addimeſticarſi con la Geometria; imperciocchè ſiccome non ricuſa ella talora di eſſere alle altrui dimande e premure più aſſai che non ſi vorrebbe incivile, e indiſcreta; così poi in ricompenſa altra volta ne vuole ella ſteſſa eſſer larga e corteſe più che non biſogna.

Ho io finito, corteſiſſimi Accademici, di mettere a riſchio la voſtra pazienza. Mi ſon ſtudiato di eſſere e chiaro e breve, quanto io poteva: piaccia a Dio, che non lo ſia ſtato aſſai meno di quello, che voi avreſte voluto.

LET-


Fig.a 1.a
H
B
F
a 3.a
A Fig.a 4.a B
Z


Fig.ª 1.ª
H
V
B
A
F
A Fig.ª 3.ª
C
B
Q
D
E
A Fig.ª 4.ª B
C
D
A
G
g
H
m
E
m
H
X Fig.ª 2.ª
V
A
F
Z

L E T T E R A
DI VINCENZIO RICCATI
DELLA COMPAGNIA DI GESU'

A L P A D R E

LEONARDO XIMENES
DELLA MEDESIMA COMPAGNIA

Nella quale ſi dimoſtra, e s' amplia
un Teorema

D E L S I G N O R

GIOVANNI BERNOULLI
SPETTANTE ALLA RETTIFICAZION
DELLE CURVE

LETTERA I.

Molto Reverendo in Criſto Padre.

NOn vi ſtupite, riveritiſſimo Padre, s'io torni a ſcrivere ſovra un antico Teorema pubblicato ſin dal 1697. negli atti di Lipſia dal Signor Giovanni Bernoulli Geometra, come ſapete, di primo ſeggio. Perciocchè avendo negli ſteſſi atti del 1739. il Signor Giovanni Teofilo Valzio uomo dottiſſimo proccurato di manifeſtarne l'occulta analiſi, una ne ha prodotto, la quale quanto è ingegnoſa, e d'artificj ripiena; altrettanto rieſce moleſta per la ſua lunghezza, e increſcevole. Laonde deſiderio mi nacque di far prova, ſe mi riuſciſſe di cavare il Teorema Bernoulliano con un'analiſi più ſemplice, e più elegante: e vie più crebbe queſto mio deſiderio, quando nel Bernoulli leſſi, ch' egli non indicava l'analiſi, onde avea il ſuo Teorema trovato, perchè il calcolo ſarebbe di troppa prolißità. Toccherà a voi il giudicar del mio

 meto-

metodo, col quale non ſolamente il Teorema ricavo, ma ancora l' eſtendo d'aſſai, e parecchi altri ne diſcuopro, che non ſono del tutto d' eleganza sforniti.

Il Teorema dal ſuo Autore in cotal guiſa s' eſpone: Se, poſte d'una data curva le coordinate x, y, deſcrivaſi un altra curva, le cui coordinate ſieno

$$\frac{x\,dy^3}{dx^3},\ \text{e}\ \frac{3\,x\,dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2}\,S\frac{dy^2}{dx}$$

amendue le curve la genitrice, e la generata preſe inſieme ſaranno rettificabili. Siami permeſſo d' eſpor lo ſteſſo Teorema un poco diverſamente, cioè a dire: ſe l' equazion della curva data ſia $dy = p\,dx$, nella quale p ſia data per x, e per coſtanti, e ſe deſcrivaſi un altra curva, le cui coordinate ſieno

$$x\,p^3,\ \text{e}\ \tfrac{3}{2}\,x\,p^2 - \tfrac{1}{2}\,S\,p^2\,dx,$$

amendue le curve preſe inſieme riceveranno rettificazione algebraica.

Per venire a capo del mio diſegno, fa di meſtieri, ch' all' elemento della curva data, il quale è $= dx\sqrt{1 + pp}$, ſi aggiunga una quantità differenziale, la qual ſia dotata delle ſeguenti due condizioni, prima, che il di lei quadrato ſia diviſibile in duo quadrati, le cui radici non contengano veruna quantità immaginaria; l' altra, ch' aggiunta al predetto elemento della curva data, componga una

for-

formola integrabile. La prima condizione non manca in veruna formola, che ſia multiplicata per $\sqrt{M+N}$, nella quale l' uno, e l' altro termino ſia affetto del ſegno $+$. Ma per isfuggire i lunghi calcoli in vece di $\sqrt{M+N}$ uſerò la $\sqrt{1+pp}$, la qual nell' elemento della curva data ritrovaſi. L' altra condizione io l' otterrò col chiamar in ſoccorſo il metodo delle quantità indeterminate.

Sia per tanto l' elemento della curva cercata $=$

$$\overline{V\,dx+Zx\,dp}\cdot\sqrt{1+pp},$$

nel quale V, Z ſono quantità da determinarſi per x nel progreſſo dell' analiſi. Adunque la ſomma dei due elementi ſarà $=$

$$dx\sqrt{1+pp}+\overline{V\,dx+Zx\,dp}\cdot\sqrt{1+pp}=$$
$$\overline{1+V}\cdot dx\sqrt{1+pp}+Zx\,dp\sqrt{1+pp}.$$

Di queſta l' integrale ſupponghiamo eſſere $=$

$$\overline{1+V}\cdot x\sqrt{1+pp},$$

che differenziato darà

$$\overline{1+V}\cdot dx\sqrt{1+pp}+dV\cdot x\sqrt{1+pp}+\frac{\overline{1+V}\cdot xp\,dp}{\sqrt{1+pp}}$$

A determinare il valore di Z ſi paragoni cotal formula coll' antecedente, e ſi vedrà che naſce la ſeguente egualità

$$Zx\,dp\sqrt{1+pp}=dV\cdot x\sqrt{1+pp}+\frac{\overline{1+V}\cdot xp\,dp}{\sqrt{1+pp}}$$

Poichè la V dovrà tra poco determinarſi per x o per p, ſi ponga $dV = q\,dp$, e facendo la ſoſtituzione, e dividendo l' equazione per $x\,dp\sqrt{1+pp}$ ſi troverà

$$Z = q + \frac{\overline{1+V}.\,p}{\sqrt{1+pp}}$$

Pertanto ſe nell' aſſunto elemento della curva cercata in luogo di Z il ſuo valore ſi ponga, ſara manifeſto, che aggiunto all' elemento della formola data ſarà integrabile di modo, che fatta l' integrazione avremo

$$\overline{1+V}.\,x\sqrt{1+pp}.$$

Voglionſi al preſente determinare le coordinate della curva cercata. L'elemento della curva cercata cioè

$$\overline{V\,dx : Z\,x\,dp}.\sqrt{1+pp}$$

s' alzi ál quadrato, e ſi divida ne' due quadrati ſeguenti

$$\overline{V\,dx+Z\,x\,dp}^2 \quad , \quad p^2.\,\overline{V\,dx+Z\,x\,dp}^2.$$

Le radici di cotai quadrati, che non involvono quantità immaginarie, daranno le differenze delle due coordinate della curva cercata. cioè

$$V\,dx \pm Z\,x\,dp \qquad p.\,\overline{V\,dx+Z\,x\,dp}.$$

In queſte ſi ponga il valor della Z poco anzi trovato, e avraſſi

$$V\,dx + q\,x\,dp + \frac{\overline{1+V}.\,x\,p\,dp}{\sqrt{1+pp}} \quad ,$$

$$p.\overline{Vdx+qxdp}+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{\sqrt{1+pp}}$$

ma $qdp=dV$: dunque le differenze delle coordinate ſaranno

$$Vdx+xdV+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{\sqrt{1+pp}},$$

$$p.\overline{Vdx+xdV}+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Prendendo di queſte due formule gl' integrali, ritroveremo le due coordinate cercate. Nell' integrare ſi può omettere la coſtante, non cangiandoſi da queſta la curva, nè ai ſegni ſi vuole aver riguardo; perchè o poſitive, o negative ſi prendano l'ordinate la curva reſta la ſteſſa.

Prima che la V per x, e per p ſi determini, ſarà bene conſiderare, che ſe la differenza della prima coordinata della curva cercata ſi moltiplichi per p avremo l' altra; la qual condizione ritrovaſi ancor nelle differenze della curva data. Perlochè ſe ponga ſi

$$Vdx+xdV+\frac{\overline{1+V}.xpdp}{\sqrt{1+pp}}=dz,$$

gli elementi delle coordinate della curva or ora trovata ſaranno dz, pdz: dunque

ſe una nuova curva diſcrivaſi, nella quale ſieno gl'elementi dell'

affiſſa

$$W dz + z dW + \frac{\overline{1+W}\, z p dp}{1+pp},$$

ordinata

$$p.\overline{W dz + z dW + \frac{\overline{1+W}.z p dp}{1+pp}}$$

queſta inſieme coll' antecedente ſarà rettificabile, ed eguale a $\overline{1+W}.z\sqrt{1+pp}$. Ognun vede, che la z è data per x. Quant' alla W comunque eſſa a piacere determinare ſi poſſa; pure affinchè la terza curva naſca dalla ſeconda, come la ſeconda dalla prima, debb' eſſer data per Z in quella guiſa, che V vien data per x. Laonde ſe la V è data ſolamente per p, ſarà $W = V$; ma s' eſſa è data ancora per x, non ſarà difficile l' indeterminata W ſimilmente determinare per z. Per cotal maniera dalla terza curva ſi troverà la quarta, dalla quarta la quinta, e così di mano im mano. Con ſi fatto metodo ſi formerà di curve una ſerie, in cui a due a due ſi potranno rettificare.

In oltre ſiccome dalla curva, in cui le differenze delle coordinate ſono dx, pdx, naſce un' altra curva, le cui coordinate

egua-

eguagliano gl' integrali delle ſeguenti quantità

$$Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp},$$

$$p.Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp};$$

così da queſta vicendevolmente quella ſi può far naſcere, e la ſomma delle due curve ſarà $\overline{1+V}.x\sqrt{1+pp}$. Ad ottener ciò, e ad iſtabilire un ſecondo generale Teorema ſi faccia

$$Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}.xpdp}{1+pp} = dz,$$

e per mezzo di queſta equazione la x ſi determini. Dividiamo per xV, e avremo

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}} = \frac{dz}{xV}.$$

Facciamo

$$\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}} = \frac{ds}{s}, \text{ onde } c^{S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}} = s$$

nella quale c è il numero, il cui logaritmo è uguale all' unità. Fatta la ſoſtituzione otterremo l' equazione

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dz}{Vx}.$$

Di

Di nuovo ſuppongaſi

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dr}{r},$$

e per conſeguenza $xVs = r$. Per mezzo della ſoſtituzione naſcerà $\frac{dr}{r} = \frac{sdz}{r}$, ovvero $r = Ssdz$: dunque $xVs = Ssdz$,

$$\text{o ſia } x = \frac{Ssdz}{Vs} = \frac{Sdz.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{V.\overline{1+pp}}}}{V.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{V\,\overline{1+pp}}}}.$$

Laonde ſe le coordinate della curva ſaranno z, $Spdz$, le coordinate dell' altra, che inſieme con lei è rettificabile, verranno ad eſſere

$$\frac{Sdz.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{V.\overline{1+pp}}}}{V.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{V.\overline{1+pp}}}},\quad Sp.D\frac{Sdz.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{V.\overline{1+pp}}}}{V.c^{S\frac{1+\overline{V.pdp}}{\overline{1+pp}}}}$$

Per identità di ragione ſe d'una curva data le coordinate ſieno x, $Spdx$, le coordinate dell' altra curva ſaranno quelle, che dall' ultime formule naſceranno, ſe in eſſe in luogo della z ſoſtituiremo la x. E queſto è un altro general Teorema, cui noi in appreſſo chiameremo il ſecondo, per mezzo di cui potremo, ſiccome nel primo fatto abbiamo,

far

far naſcere una ſerie di curve ricavando dalla ſeconda la terza, dalla terza la quarta, e così via via. Si vuol por mente però, eſſer coſa facile di far sì, che le due ſerie nate dal primo, e dal ſecondo Teorema una ſola ſerie compongano, quando la V ſia data unicamente per la p: ma ſe data ſia ancor per la x è di meſtieri, che ſi prenda data per x in quella guiſa, in cui prima era data per z; la qual coſa in più caſi non rieſce così agevole ad otteneſi.

In cotai ſerie maraviglioſe proprietà ſi ravviſano, le quali per noi ſi faran manifeſte più chiaramente, quando ad alcun caſo particolare applicheremo i generali Teoremi.

Ripigliando pertanto il primo Teorema, e determinando la quantità V facciamo naſcere parecchi men generali Teoremi. Tra queſti il più ſemplice, ed elegante ſembrami eſſer quello, che trae origine dalla determinazione di $V = pp$. In cotal ipoteſi eſſendo gli elementi delle due coordinate della curva data dx, pdx, quelli della curva cercata ſaranno $p^2 dx + 3xpdp$, $p^3 dx + 3xp^2 dp$; e integrando avremo le

aſſiſſe	ordinate
$p^2 x + Sxpdp$	
ovvero	$p^3 x$
$\frac{3}{2}p^2 x - \frac{1}{2} S p^2 dx$	

Queſto è il Teorema del Signor Giovanni

Ber-

Bernoulli, di cui il mio metodo ha ſommi-niſtrata un analiſi facile, e ſpeditiſſima.

Seguendo l'eſempio di queſt'uomo d'ogni lode maggiore applichiamo alle parabole il ſuo Teorema, e ponghiamo, che della data curva le coordinate ſieno

x, $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\cdot A^m}$: quindi le differenze loro ſaranno

dx, $\frac{x^m dx}{A^m}$: dunque $p = \frac{x^m}{A^m}$. Da queſta determinazione naſcono della cercata curva le ſeguenti coordinate

$$\frac{3m+1}{2m+1}\cdot\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}, \quad \frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}.$$

Ho poſte le due curve nella quì anneſſa tavola la prima al num. 1. l'altra al num. 2. Eſſendo poi la ſomma delle due curve $= \overline{1+V}\cdot x\sqrt{\overline{1+pp}}$, ſoſtituendo i valori la troveremo

$$= x.s + \overline{\frac{x^{2m}}{A^{2m}}}^{\frac{3}{2}} = x.\frac{\overline{A^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$$; e chiamando

$$\frac{\overline{A^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}} = Z$$ ſarà la detta ſomma

$= xZ$, come nella ſteſſa Tavola appariſce.

Non contento della ſeconda curva, che viene dalla prima prodotta, traggo dalla

ſecon-

ſeconda la terza, dalla terza la quarta, e ſuſſeguentemente quanto biſogna, e tutte diſtribuendole nella tavola formo quella ſerie, che vien indicata dai numeri affermativi. Le lettere B, C, D, ec. diſegnano i coefficienti dell' aſſiſſe nella curva ſuperiore; onde ſia $B = \frac{3m+1}{2m+1}$, $C = B.\frac{5m+1}{4m+1}$, $D = C.\frac{7m+1}{6m+1}$, e così di mano in mano. In queſta ſerie ciaſcuna inſieme colla ſua vicina è rettificabile, anzi eguale a quella quantità, che nella Tavola vien ſegnata.

Formata, e portata innanzi la ſerie per l' una parte, mi ſtudio di continuarla ancora dall' altra. Ciò ſi può eſeguire con due metodi, cioè o per mezzo della natura della ſerie, la quale è aſſai conoſciuta per poterla proſeguire ancora al di ſopra, o per mezzo del ſecondo generale Teorema, il quale nel caſo noſtro ad una maſſima ſimplicità ſi riduce. Le curve con tai metodi ritrovate le ho poſte nella Tavola ſotto ai numeri negativi incominciando dall' *o*. V' ha però qualche divario tra la ſerie inferiore, e la ſuperiore, perchè in queſta le lettere G, H, K, ec. dinotano i coefficienti dell' ordinate della curva inferiore, onde ſarà $G = \frac{1}{m+1}$, $H = G.\frac{-2m+1}{-m+1}$, $K = H.\frac{-4m+1}{-3m+1}$ e così

dell'

dell' altre. La ſomma delle due vicine curve, come dianzi, la ritroverai nella Tavola.

Formata cotal ſerie vengon le curve denominate pei numeri, che lor corriſpondono nella Tavola.

Si ha $1 \dagger 2 = xZ$

$$2 \dagger 3 = \frac{Bx^{2m \dagger 1}}{A^{2m}} Z\text{: dunque ſottraendo}$$

$$1 - 3 = \frac{A^{2m}x - Bx^{2m \dagger 1}}{A^{2m}} . Z\text{. Di più}$$

$$3 \dagger 4 = \frac{Cx^{4m \dagger 1}}{A^{4m}} Z\text{: dunque aggiungendo}$$

$$1 \dagger 4 = \frac{A^{4m}x - BA^{2m}x^{2m \dagger 1} \dagger Cx^{4m \dagger 1}}{A^{4m}} . Z\text{:}$$

e così ſeguitando, troveremo, ch' alla prima curva aggiungendo qualunque altra, che poſta ſia in ſede pari, proverrà la ſomma rettificabile; e che dalla prima levando qualunque altra, che poſta ſia in ſede diſpari, proverrà la differenza rettificabile. Ciò che della prima curva s' è detto, a tutte l' altre egualmente s' eſtende. Per le quali conſiderazioni il Teorema ſeguente ſi ſtabiliſce. Due curve della noſtra ſerie, delle quali l' una ſia in ſede pari, l' altra in diſpari,

hanno

hanno la ſomma rettificabile: Due curve poſte, o amendue in ſede pari, o amendue in ſede diſpari, hanno rettificabile la differenza. Pertanto non ſolamente è vero ciò, che viene dal Bernoulli notato, che ciaſcuna parabola ne ha un' altra, con cui accoppiata ammette rettificazione, ma è vero eziamdio, che ciaſcuna parabola ne ha infinite, le quali aggiunte, o levate da eſſa ricevono rettificazione algebraica.

Per ciò, che ſin al preſente s' è dimoſtrato, infiniti altri archi determinar ſi poſſono nelle noſtre parabole, la cui ſomma, o differenza rieſce rettificabile. E per indicarlo con brevità, ſia nella figura anneſſa A C G qualunque parabola, nella quale tagliata l' aſſiſſa A B ſi determini l' arco A C. Abbiavi ancora un' altra parabola, la quale accoppiata colla prima, rieſca rettificabile. Si tagli l' analoga aſſiſſa A D, e l' arco A E di maniera, che A C † A E eguagli una quantità algebraica. Prendaſi un' altra aſſiſſa A F maggior della prima, che determini l' arco A G. Due caſi poſſono avvenire; primo, che l' aſſiſſa analoga della ſeconda parabola ſia maggiore; ſecondo, che ſia minore di A D. Suppongaſi in prima maggiore, e ſia A H, a cui corriſponde l' arco A M. Poichè
non meno A G † A M
che A C † A E vien ad eguagliare una

quan-

quantità algebraica, facendo l' opportuna ſottrazione ſarà

CG † EM rettificabile. Sia in ſecondo luogo l' aſſiſsa AK minor di AD, a cui corriſponde l' arco AN. Giacchè gli archi

AG † AN
AC † AE ſono rettificabili, fatta la ſottrazione gli archi
CG — EN riuſciranno rettificabili; ſiccome ſi dovea ritrovare.

Se poi non la ſomma de' due archi parabolici, ma la differenza ſia algebraica, nel primo caſo avremo

AG — AM
AC — AE rettificabili; dunque ſottraendo CG — EM ſimilmente rettificabile. Nel ſecondo caſo collo ſteſso metodo ſimilmente ſi proverà eſser rettificabile la ſomma degli archi CG † EN.

Il dottiſſimo Sig. Bernoulli acconciamente riflette, che da una parabola primaria cubica naſce una parabola primaria cubica: la qual verità dalla noſtra ſerie agevolmente raccoglieſi. Imperciocchè ſe pongaſi $m = -\frac{2}{3}$, le coordinate della curva adiacente al numero 1 ſaranno x, $3A^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$; e dell' adiacente al numero 2 $\frac{3A^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{A^2}{x}$. L' una e l' altra di co-

tai

tal curva facilmente ſi ravviſa per una parabola primaria cubica. V' ha però qualche divario; perchè della prima l'aſſiſse voglionſi prender nell' aſse, della ſeconda nella tangente all' aſse perpendicolare. Per la qual ragione avviene, che la terza curva naſcente dalla ſeconda, non ſia una parabola primaria cubica, ma una parabola d'ordin più alto, cioè la quinta della ſettima podeſtà: Bella, e maraviglioſa ſembra la proprietà della parabola primaria cubica, il cui arco congiunto con un altro arco della ſteſſa curva non rigetta d'eſſer rettificato.

Ma cotal proprietà ad infinite altre parabole pur conviene. Imperciocchè allora le curve della noſtra ſerie ſaranno del medeſimo ordine, quando nella ſuperiore l' indice dell'ordinata diviſo per l'indice dell' aſſiſſa ſia eguale all' indice dell' aſſiſſa diviſo per l' indice dell' ordinata della curva inferiore. Se queſta regola adoperando farete sì, che due curve vicine, quali vogliate, ſieno dello ſteſso ordine, ritroverete ſempre mai due parabole primarie cubiche; ma quelle due, che a queſte ſono vicine, vedrete eſſere due parabole quinte della ſettima podeſtà; quelle due, che ſeguono al di ſotto, e al di ſopra, due parabole none dell' undecima podeſtà, e così di mano in mano. Laonde tutte le parabole, il cui indice è

eſpreſso per la formula $\frac{4n+1}{4n+3}$ poſto n un numero intero, hanno cotal proprietà, che congiunte con un altra parabola dello ſteſſo ordine ſono rettificabili.

Che ſe facciamo in guiſa, che ſieno del medeſimo ordine due, che vengono per una terza diviſe, ritroveremo due parabole terze della quinta podeſtà, quelle che ſeguono due parabole ſettime della nona podeſtà, le vicine due parabole undecime della podeſtà decimaterza, e così di mano in mano. Laonde ſe n ſia un numero intero, o anche zero, tutte le parabole, il cui indice ſia $= \frac{4n+3}{4n+5}$, ſottratte da un arco parabolico dello ſteſſo ordine ricevono algebraica rettificazione. La curva poi, che ſta di mezzo tra queſte ſi ritrova eſſere un' iperbola apolloniana.

Molte altre proprietà potrei ſcuoprire nelle curve della noſtra ſerie: ma ſcrivendo ad un geometra ſtimo coſa ſuperflua lo ſpiegar a lungo ciò, che per ſe medeſimo può vedere.

Abbiam dedotto col noſtro metodo il Bernoulliano Teorema: molti altri dedur ſimilmente ſi poſſono comunque non tanto ſemplici, ed eleganti, ſe l'indeterminata V in altra determinare ſi voglia, come ſe facciaſi

$1+V$

$$1 + V = M.\overline{1+pp},$$

ovvero più univerſalmente

$$1 + V = M.\overline{1+pp}^{\,n}$$

o ſe pongaſi $V = \frac{M}{x}$. Ma omettere non ſi vuole una determinazione aſſai ſemplice, per mezzo di cui ſi ritrova ſempre una curva algebraica, quando ſia algebraica la curva data.

Supponete $1 + V = \frac{M.\overline{1+pp}}{x}$: dunque

$$x + Vx = M.\overline{1+pp};$$

e prendendo le differenze, indi opportunamente trasferendo, avrete

$$V\,dx + x\,dV = 2\,M\,p\,dp - dx.$$

Fatta la ſoſtituzione troverete eſſere le differenze delle coordinate della curva cercata

$$2\,M\,p\,dp - dx + M\,p\,dp,$$
$$2\,M\,p^2\,dp - p\,dx + M\,p^2\,dp$$

ovvero

$$3\,M\,p\,dp - dx, \qquad 3\,M\,p^2\,dp - p\,dx$$

e fatta l'integrazione

$$\tfrac{3}{2}\,M\,p^2 - x \quad , \qquad M\,p^3 - S\,p\,dx.$$

Quando la curva data algebraica ſia, potrà ſempre ottenerſi algebraicamente $S\,p\,dx$: dunque ancor la curva ritrovata ſarà ritro-

vata ſarà albebraica. Gli archi delle due curve preſe inſieme ſaranno $= M.\overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$. Avvertite però, che vuolſi aver riguardo alle coſtanti, che nell'integrazione ſi ſono omeſſe.

Sarà coſa inutile il tentare, di formare con queſta determinazione una ſerie di curve: perciocchè la ſteſſa curva ben preſto ritornerà. E per farlo toccar con mano pongo $\frac{3}{2}Mp^2 - x = z$: dunque le coordinate ſaranno z, $Spdz$: dunque le nuove coordinate della curva neſcente introducendo una nuova coſtante N verranno ad eſſere

$$\tfrac{3}{2}Np^2 - z \quad , \quad Np^3 - Spdz.$$

In luogo di z ſi ſoſtituiſca il ſuo valore per x, e ſi troverà

$$\tfrac{3}{2}\overline{N - M}p^2 + x \quad , \quad \overline{N - M}.p^3 + Spdx$$

La ſomma degli archi di queſta, e dell'antecedente $= \overline{N - M}.\overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$.

Se da capo ſi ponga

$$\tfrac{3}{2}.\overline{N - M}.p^2 + x = z,$$

ſi troverà l'ordinate della quarta curva introducendo una novella coſtante O.

$$\tfrac{3}{2}.\overline{O - N + M}.p^2 - x \quad , \quad \overline{O - N + M}.p^3 - Spdx,$$

le

le quali non ſon diverſe dalle coordinate della ſeconda curva ſe non in ciò, che la quantità coſtante, coefficiente del primo termine in queſta vien eſpreſſa per M, nell'ultima per O — N † M. Laonde cotal determinazione della quantità V non può veruna profittevol ſerie ſomminiſtrare.

Con ciò ſembrami ſenza più d'aver dichiarato il metodo, ch' ho ſeguito, di cui toccherà a voi il giudicare, giacchè io lo ſottometto interamente al voſtro retto giudizio, e alla prudente voſtra cenſura. Voi trattanto ſeguitate a coltivare, ed a perfezionare la geometria, per cui vantaggio procurate di conſervarvi lungo tempo, e ricordatevi, che io ſono tutto a' voſtri comandi ec.

Bologna li 27. Marzo 1751.

LETTERA
DI VINCENZIO RICCATI
DELLA COMPAGNIA DI GESU'
ALLA SIGNORA
D. GAETANA MARIA AGNESI
INTORNO ALLA COSTRUZIONE DI ALCUNE FORMULE SENZA LA SEPARAZIONE DELLE INDETERMINATE.

Illuſtriſſima Sig. Sig. Padrona Colendiſſima.

IL dottiſſimo Signor Clairaut geometra d'alto merito eſſendo in un operetta meccanica ſtampata nell' Accademia Regia di di Parigi del 1742. pervenuto alla formula $T^2 dt = p^2 dt \dagger dp$, la chiama famoſa preſſo i geometri, che al calcolo integrale ſi ſono applicati, non avendo alcuno potuto in eſſa ſeparar l'indeterminate, ſe non in un picciol numero di caſi aſſai particolari. *Il Signor Eulero ſolo*, ſoggiunge,

per

per quanto io ſappia, ne ha data una coſtruzion generale: e comunque cotal coſtruzione non abbia i vantaggi di quelle, che ſon fondate ſopra la ſeparazione dell' indeterminate, eſſa è non per tanto degna del dotto ſuo autore. E poichè eſſa è conoſciuta a pochi geometri, io l' eſporrò quì.

Sia deſcritta la curva A B (Fig. I.) *le cui aſſiße* K G *ſieno* $2\,a\int T\,dt$, *e l' ordinate*

G E *ſieno* $a\,l\frac{s}{T}$, *eßendo* a *una coſtante preſa ad arbitrio. Col filo* E F = a *deſcrivaſi la curva* C D *trattoria della curva* A B. *Dividendo egualmente l' angolo* G E Q *colla retta* E R, *l' ordinata* p *della curva cercata ſarà* $\frac{GR}{GE}\cdot T$. Sin quì il Clairaut

La novità di così fatta coſtruzione m' ha deſtato voglia di cercarne la dimoſtrazione, la quale avendo io agevolmente ſcoperta, ho preſo conſiglio d' inviarla a voi, la quale dopo i due dottiſſimi Tomi d' Iſtituzioni Analitiche dati alla luce avete acquiſtato il diritto d' eſſer giudice di così fatte materie.

S' intenda deſcritta la curva A B (Fig. I. II., III., IV.) la cui equazione ſia data tra le coordinate K G = x, G E = y. In primo luogo rifletto, che di cotal curva quattro trattorie ſi voglion conſiderare. Poichè po-

nendo il filo da quella parte, ov' è poſto l' aſſe, ſe il moto ſi faccia da A in B, naſce la trattoria della Figura prima, ſe il moto diriggaſi da B in A, naſce quella della Figura II. Similmente collocato il filo dopo l' aſſe, e la curva A B, le Figure III. e IV. mettono ſotto degli occhi le due trattorie deſcritte, la prima quando ſi cammini da A in B, l' altra quando da B in A ſi faccia il movimento. Per abbracciar tutti i caſi, nelle coſe, ove le quattro trattorie non convengono, ſcriverò quattro ſegni, il cui ordine corriſponderà all' ordine delle figure.

Sia F H ordinata della trattoria, e ſi meni F L parallela all' aſſe. Indi preſa G M $= a$, ſi conduca M N parallela al filo F E, o ſia alla tangente della ſteſſa trattoria. Chiamiſi G N $= q$, K H $= z$, la differenza dell' ordinata F H ſarà $=$

$$\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\frac{q\,dz}{a}.$$ Nella prima, e nella quarta figura poneſi il ſegno †, perchè creſcendo l' aſſiſſe K H creſcono l' ordinate F H; nell' altre due figure per l' oppoſita ragione poneſi il ſegno —. Quindi ſarà l' ordinata

$$F H = S\begin{matrix}+\\-\\-\\+\end{matrix}\frac{q\,dz}{a}$$

Fiſſate così fatte denominazioni abbiamo le due ſeguenti analogie

MG

MG : GN : : FL : LE

$$a : q :: \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix} z : \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix}-\\-\\+\\+\end{smallmatrix} S \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} \frac{q\,dz}{a}$$

MG : MN :: FL : FE

$$a : \sqrt{aa+qq} :: \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix} z : a.$$

Dalla ſeconda di queſte analogie trarrem l' equazione

$$\frac{aa}{\sqrt{aa+qq}} = \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix} z,$$

$$\text{ovvero } z = x \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix} \frac{aa}{\sqrt{aa+qq}},$$

la quale differenziata darà

$$dz = dx \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} \frac{a^2 q\,dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}$$

Così fatti valori ſi traſportino nella prima analogia, e avremo

$$a : q :: \frac{aa}{\sqrt{aa+qq}} : \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix}-\\-\\+\\+\end{smallmatrix} \frac{1}{a} \overline{S \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} q\,dx \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} \frac{a^2q^2dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}},$$

dalla quale paſſando all' egualità troveremo

$$\overline{S\substack{\pm\\\mp\\\pm} q\,d\,x \substack{\pm\\\pm\\\mp}\frac{a^2q^2dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}} = a\,y \substack{\mp\\\pm\\\pm}\frac{a^2q}{\sqrt{aa+qq}}$$

In queſta prendendo le differenze ſarà

$$\substack{\pm\\\mp\\\pm} q\,d\,x \substack{\pm\\\pm\\\mp}\frac{a^2q^2dq}{\overline{a^2+qq}^{\frac{3}{2}}} =$$

$$a\,d\,y \substack{\mp\\\pm\\\pm}\frac{a\,dq}{\sqrt{aa+qq}} \substack{\pm\\\pm\\\mp}\frac{a^2q^2dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}$$

e cancellati i termini, che diſtruggonſi, avremo

$$\substack{\pm\\\mp\\\pm} q\,d\,x = a\,d\,y \substack{\mp\\\pm\\\pm}\frac{a^2dq}{\sqrt{a^2+q^2}},$$

ovvero $$\frac{a^2dq}{\sqrt{aa+qq}} = \substack{\mp\\\pm\\\pm} q\,d\,x \substack{\pm\\\pm\\\mp} a\,d\,y.$$

Il metodo per cui queſt' equazione s'è ritrovata, fa veder chiaramente, ch'eſſa può eſſere coſtruita, ogni qualvolta la y ſia data per la x, comunque non ſi poſſano ſeparar l' indeterminate. La coſtruzione è la ſeguente. Deſcritta la curva A B, le cui aſſiſſe K G $= x$, le cui coordinate G E $= y$, ſi delinei la ſua trattoria C D, la cui tangente al punto F ſia F E $= a$. Si tagli G M $= a$, e ſi conduca M N parallela alli

F E

F E, la qual concorra con G E in N: al punto N ſarà nella curva cercata, e la retta G N ſarà l' ordinata $= q$. L'ordine dei ſegni comparato col numero delle figure fa paleſe, qual delle quattro trattorie adoperare ſi voglia. Solo avvertir ſi deve, che in ciaſcuno de' quattro caſi egli v' ha infinite trattorie, le quali dipendono dalla prima poſizione del filo. Ma ſiccome la particolare natura del problema determina qual coſtante aggiunger ſi debba nell' integrazione, così dimoſtrerà, in qual maniera il filo ſi debba collocare da prima per deſcrivere la trattoria.

Coſtruita l' ultima noſtra equazione, coſa manifeſta ſi è, che qualunque formula ſi potrà ad eſſa ridurre, riceverà una meccanica coſtruzione. Ma tra tutte meritano particolar conſiderazione quelle, le quali ſono libere da' ſegni radicali. Affine di ritrovarle quanto generalmente ſi può, mi ſervo della ſeguente ſoſtituzione

$$p = \frac{a\,T}{\sqrt{aa + qq} + q}$$

per mezzo della quale ritroveremo

$$q = \frac{a}{2}\,\frac{T^2 - p^2}{Tp}, \sqrt{aa + qq} = \frac{a}{2}.\,\frac{T^2 + p^2}{Tp},$$

$$\text{e } dq = \frac{a}{2}.\,\frac{T^2 + p^2}{T^2 p^2}.\,\overline{p\,dT - T\,dp}:$$

i quai

i quai valori nella coſtruita equazione ſoſtituiti daranno l'equazion novella

$$\frac{a^2 . p\,dT - T\,dp}{p\,T} = \substack{-\\+\\-\\+}\frac{a}{2}dx . \frac{T^2 - p^2}{p\,T}\substack{+\\+\\-\\-}a\,dy$$

la qual ridotta ſarà

$$\substack{+\\-\\+\\-}\frac{p^2\,dx}{T} - p.\overline{\frac{2\,a\,dT}{T}\substack{-\\-\\+\\+}2\,dy}\substack{-\\+\\-\\+}T\,dx + 2\,a\,dp = 0.$$

Qui comincia a mancare una totale univerſalità, poichè il primo, ed il terzo termino devono eſſer dotati di ſegni neceſſariamente diverſi. Se nel primo termino ritrovaſi il $+$, ſi potra ſervire della prima, e della terza figura, ma converrà far uſo della ſecouda, o della quarta, s'eſſo abbia il —. Dal ſecondo termino poi ſi vedrà, quale delle due ſarà più utile adoperare.

Per la coſtruzione ſi divida l'angolo M N G egualmente colla retta N T: chiara coſa è, ch' avremo

$$GT = \frac{aq}{\sqrt{aa + qq} + q} :$$

dunque ſi faccia q: T : : G T alla quarta, la qual trovandoſi $= \frac{a}{\sqrt{aa + qq} + q}$, avrem la p ricercata.

Ac-

Acciocchè ſi vegga l' uſo della formula mi ſtudierò di metterlo in chiaro con un ſolo eſempio. S' abbia da coſtruir la formula

$$\frac{p^2 dz}{b} \dagger p\,dz - z\,dz \dagger b\,dp = o,$$

la quale avendo ſegni diverſi nel primo, e nel terzo termino ſi potrà coſtruire; e poichè nel primo termino v' ha il ſegno †, ſi dovrà adoperare la prima, o la terza figura. Dalla comparazione de' primi, e dei terzi termini avremo le due egualità

$$\frac{dx}{T} = \frac{dz}{b}, \; T\,dx = z\,dz.$$

Eſſendo poi nel ſecondo termino il ſegno †, la prima figura ſarà più utile della terza, onde averemo per la comparazione

$$-\frac{2\,a\,dT}{T} \dagger 2\,dy = dz.$$

Da queſte tre egualità riſulta

$$x = \frac{2z\sqrt{z}}{3\sqrt{b}}, y = \frac{z}{2} \dagger l\sqrt{bz}\; T = \sqrt{bz}.$$

I logaritmi ſi prendano nella logiſtica, la cui ſotto tangente $= a$. Finalmente gli ultimi termini ci daranno $a = \frac{b}{2}$. Adunque ſi deſcriva la curva A B, ch' abbia l' abſciſſe $= \frac{2z\sqrt{z}}{3b}$, e l' ordinate $= \frac{z}{2} \dagger l\sqrt{zb}$;

indi

indi col filo $= \frac{b}{2}$ ſi tracci di queſta curva la trattoria di quel genere, che dalla figura prima dinotaſi. Condotta la tangente della trattoria F E, ſi tagli G M $= \frac{b}{2}$, e ſi meni M N parallela alla F E; in due parti eguali ſi divida l'angolo M N G colla retta N T; indi ſi faccia N G : $\sqrt{bz}$: : G T : p; finalmente deſcrivaſi una nuova curva, che abbia l' aſſiſſe $= z$, l'ordinate $= p$: queſta ſoddisfarà all' equazione poſpoſta.

Ad accoſtarmi alla formula eſpoſta dal Signor Clairaut, fa di meſtieri annullare il ſecondo termino: onde dovrà eſſere

$$\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\, dy = \frac{a\,dT}{T}\text{, ovvero } dy = \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\, \frac{a\,dT}{T}\text{:}$$

e però integrando ſe della prima, o della ſeconda figura ſi faccia uſo, ſarà $y = l\,T$, ſe adopriſi la figura terza, o quarta, $y = l\,\frac{a^2}{T}$, prendendo i logaritmi nella logiſtica, ch' abbla la ſottotangente $= a$. Ciò fatto rimarrà

$$\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix}\, \frac{p^2\,dx}{T} \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\, T\,dx \dagger 2\,a\,dp = o,$$

nella quale fa di meſtieri, che i primi due

termi-

termini di ſegni diverſi ſieno dotati. Se il primo termino abbia il ſegno † , potrà adoperarſi la prima, e la terza figura, ſe abbia il ſegno — potrà uſarſi la ſeconda, e la quarta.

Sia a cagion d'eſempio

$$\frac{p^2\,dz - z^2\,dz}{b} + p\,dp = o.$$

La comparazione darà

$$\frac{dx}{T} = \frac{dz}{b},\ T\,dx = \frac{z^2\,dz}{b},\ 2\,a = b:$$

dalle quali equazioni ſi ricaverà

$$T = z,\ x = \frac{z^2}{2\,b}:$$

dunque adoperando la prima figura $y = l\,z$, e adoprando la terza $y = l\,\frac{b\,b}{4\,z}$. Stabilite ſi fatte determinazioni ſi operi come ſopra, e ſi compia la coſtruzione.

Non debbo diſſimulare, che tra la mia coſtruzione, e quella indicata dal Signor Clairaut, vi corre qualche differenza; ma queſta naſce dalla diverſa ſoſtituzione: perocchè ſe in luogo della formula

$$p = \frac{a\,T}{\sqrt{aa + qq} + q}$$

aveſſi uſata l'altra $p = \frac{a\,T}{\sqrt{aa + qq} - q}$

ſarei

ſarei ſtato coſtretto a dividere egualmente l' angolo eſterno GNO colla data NP, ſiccome domanda la coſtruzione dal Clairaut indicata.

Mi diſpiace aſſai, che quando i primi due termini nell' ultima formula ſono dotati dello ſteſſo ſegno, il metodo non conduca alla coſtruziooe. Per ottener ciò ſarebbe di meſtieri, che coſtruir ſi poteſſe la formula

$$\frac{a^2\,dq}{\sqrt{qq-aa}} = \substack{-\\+\\-\\+}\, q\,dx \,\substack{+\\+\\-\\-}\, a\,dy;$$

perciocchè colle ſteſſe ſoſtituzioni ſi perverrebbe a formule, che ne notati termini avrebbero prefiſſo lo ſteſſo ſegno. Ma ſin ora è ignoto ſiccome queſta formula coſtruire ſi voglia. Non biſogna però traſcurare il poco, quando il tutto ſaper non ſi poſſa.

Al voſtro giudizio ſottometto in tutto queſte mie rifleſſioni; ed a miglior giudice ricorrer non poſſo avendo voi dichiarato al mondo co' voſtri ſcritti, quanto profondamente per voi ſi penetri cotal genere di dottrine benchè aſtruſiſſime. Studiatevi di conſervarvi lungo tempo alla geometria, ed all' analiſi, che per voi ſi coltiva indefeſſamente, e perſuadetevi, ch' io ſono deſideroſo di ricever l' onore di qualche pregiato voſtro comando ec.

Bologna li 3. Novembre 1750.

OSSER-

Aſſiſſe	Somma delle due curve.
$-4.\ L.\ \frac{x^{-10m+1}}{A^{-10m}}$	
	$L.\ \frac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}.Z$
$-3.\ I.\ \frac{x^{-8m+1}}{A^{-3m}}$	
	$I.\ \frac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}.Z$
$-2.\ K.\ \frac{x^{6m+1}}{A^{-6m}}$	
	$K.\ \frac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}.Z$
$-1.\ H.\ \frac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	
	$H.\ \frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}.Z$
$0.\ G.\ \frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	
$6m+1 \quad A^{6m}$	$D.\ \frac{x^{-2m+1}\ x}{A^{6m}}.Z$
$5.\ D.\ \frac{9m+1}{8m+1}.\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}$	
	$E.\ \frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}.Z$
$6.\ E.\ \frac{11m+1}{10m+1}.\frac{x^{10m+1}}{A^{10}}$	

	Aſſiſſe	Ordinate	Somma delle due curve.
−4.	$L.\frac{x^{-10m+1}}{A^{-10m}}$	$L.\frac{-10m+1}{-9m+1}\cdot\frac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}$	$L.\frac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}.Z$
−3.	$I.\frac{x^{-8m+1}}{A^{-3m}}$	$I.\frac{-8m+1}{-7m+1}\cdot\frac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}$	$I.\frac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}.Z$
−2.	$K.\frac{x^{6m+1}}{A^{-6m}}$	$K.\frac{-6m+1}{-5m+1}\cdot\frac{x^{5m+1}}{A^{-5m}}$	$K.\frac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}.Z$
−1.	$H.\frac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	$H.\frac{-4m+1}{-3m+1}\cdot\frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}$	$H.\frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}.Z$
0	$G.\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	$G.\frac{-2m+1}{-m+1}\cdot\frac{x^{-m+1}}{A^{-m}}$	$G.\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}.Z$
1.	x	$\frac{x^{m+1}}{m+1\cdot A^{m}}$	xZ
2.	$\frac{3m+1}{2m+1}\cdot\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}$	$\frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$	$B.\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}.Z$
3.	$B.\frac{5m+1}{4m+1}\cdot\frac{x^{4m+1}}{A^{4m}}$	$B.\frac{x^{5m+1}}{A^{5m}}$	$C.\frac{x^{4m+1}}{A^{4m}}.Z$
4.	$C.\frac{7m+1}{6m+1}\cdot\frac{x^{6m+1}}{A^{6m}}$	$C.\frac{x^{7m+1}}{A^{7m}}$	$D.\frac{x^{6m+1}}{A^{6m}}.Z$
5.	$D.\frac{9m+1}{8m+1}\cdot\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}$	$D.\frac{x^{9m+1}}{A^{9m}}$	$E.\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}.Z$
6.	$E.\frac{11m+1}{10m+1}\cdot\frac{x^{10m+1}}{A^{10}}$	$E.\frac{x^{11m+1}}{A^{11m}}$	

OSSERVAZIONE
DELL' AURORA BOREALE

DEL DI III. FEBBRAIO MDCCL.

A CUI SI AGGIUGNE

Lo ſcioglimento di un nuovo Problema per calcolarne le diſtanze ſecondo le ipoteſi del Maier

D I

LEONARDO XIMENES

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

GEOGRAFO DI S. M. I.

QUel luminoſo Fenomeno, che chiamaſi *Aurora Boreale*, il quale ci apparve la ſera del dì tre di Febbraio di queſt'anno 1750. merita certamente che ſia minutamente deſcritto, e comunicato agli altri, che avranno fatta l'oſſervazione medeſima. Poichè parlando di quelle circoſtanze, che ſono ſoſtanziali a queſto Fenomeno, e vagliono a determinare la poſitura, la diſtanza, e le cagioni, eſſe ſono quaſi tutte in eſſo intervenute, come gli uomini bene iſtruiti in queſta dottrina potranno dalla deſcrizione ſteſſa argomentare. Perchè ſi proceda con buon'ordine, e queſta ſtoria ſerva meglio alla cognizion della verità, io ſeguirò le tracce di quegli articoli, ne quali il Signor Friderico Criſtoforo Mayer racchiuſe (*Accad. Petrop. tom.* 1 *pag.* 334) le principali circoſtanze di queſt' Aurora. Il che ſervirà, o per confermare quelle circoſtanze ivi notate, o per dar loro qualche eccezione, e così nell' una, e nell' altra maniera venire

in cognizione del vero. Io trovo ancora, che la preſente Aurora Boreale, è forſe la più ſomigliante a quella che queſto Autor medeſimo oſſervò l' anno 1726. dopo la mezza notte del dì che precedette il 16.° di Settembre, e poi riportò nell' Accademia di Pietroburgo l' anno 1728. (*tom.* 4. *pag.* 105.) Il che mi è ſtato di un nuovo motivo di ſeguir le ſue orme.

I Fenomeni adunque i quali egli chiama della prima ſpecie furon queſti.

I. Alle ore 6. dopo mezzo giorno apparve verſo Tramontana l'arco luminoſo, il cui conveſſo riguardava al ſolito il noſtro Zenit, e il concavo l' Orizzonte. Queſt' arco non ſi vide mai ugualmente terminato, ma per lo più maggior terminazione aveva nelle minori altezze dall' Orizzonte, e ſimilmente maggiore nella parte Orientale, che nella Occidentale.

II. La più alta parte dell' arco non riguardava, come più volte accade, la Tramontana, ma conſiderabilmente declinava verſo l' Occaſo. Onde patiſce qualche eccezione come egli ſteſſo nel IV. Tomo della ſteſſa Accademia ha oſſervato, il ſecondo articolo del Mayer. *Altiſſima arcus pars Boream ad ſenſum ſemper exacte tenet.* La declinazione non ci parve coſtante, ma verſo le ore 7. pareva alquanto ſcemata, cioè il

cer-

cerchio verticale, che paſſava per la cima dell' arco parve meno declinante da Tramontana.

III. Eſſendo il noſtro Orizzonte dalla parte di Tramontana ingombrato da' monti, io non poſſo aſſerire, che l' arco poſaſſe ſull' Orizzonte, ma eſſendo eſſo più chiaro appunto in quella parte che da' monti reſtava coperta, ſi può congetturare che ſull' Orizzonte andaſſe a finire.

IV. La maſſima altezza dell' orlo eſteriore dell' arco alle $7.^{h}$ $17.'$ fu oſſervata di $17.^{\circ}$ in circa. Alle ore 7. $25.'$ alquanto minore, cioè di quaſi $15.^{\circ}$ Di queſta oſſervazione vanno avvertite tre coſe. La prima, che eſſa fu fatta con un piccol quadrante. La ſeconda, che colle diottre del quadrante io guardai la maggior altezza nella maggior terminazione, cioè dove la luce cominciava a paſſare dal più chiaro al più roſſeggiante. La terza che eſſendo il piombino del mio quadrante eſpoſto all' aria aperta, e ſoffiando un mediocre vento di Sud Eſt, era malagevol coſa fermare il piombino. La piccolezza del quadrante, la poca terminazione dell' arco, e il moto del piombino rendono incerta queſt' altezza dentro due, o tre gradi. Non par vero, che parlando dell' arco oſſervato nello ſteſſo luogo, coll' altezza maggiore ſi accordi una maggiore ampiezza Orizzontale.

Poichè alla prima altezza di 17.° corriſpoſe l'ampiezza Orizzontale di 70° e alla ſeconda di 15.° l'ampiezza maggiore di 71.° e forſe più.

V. Tanto l'ampiezza che l'altezza ſoffèrirono continuo cangiamento; ma a mio giudizio, nè mai l'altezza oltrepaſsò i 20.° ne l'ampiezza i 75.° ſi avverta che queſta ampiezza non potè oſſervarſi nello ſteſſo Orizzonte; ma piuttoſto in un piano elevato ſino all'elevazione de' noſtri monti Boreali, che in qualche luogo oltrepaſſa i 5.° Io non ebbi agio nel tempo del Fenomeno di oſſervare queſt' elevazione nel luogo dell' arco; ma ne' dì ſeguenti mi parve, che queſta elevazione foſſe di 4.°

VI. La maggior, o minor terminazione, e regolarità dell' arco non era punto legata alla maggiore, o minor altezza, ma ora colla maggiore altezza ſi accompagnava, una miglior terminazione, ora colla minore. Vero è, che per lo più alle altezze maggiori corriſpondeva una maggior degradazione di color roſſeggiante. Conſiderando l'arco nel tempo ſteſſo, ſempre una maggior penombra, o degradazion di colore oſſervavaſi nelle parti più alte dall' Orizzonte, che nelle più baſſe.

VII La generazion de' nuovi archi in queſta Aurora era ſenſibile, tra' quali due furono

rono in diverſi tempi più ſenſibili, e meglio terminati, le cui altezze, ed ampiezze ho già riportate.

VIII. Senza nuova generazion di archi oſſervabili l' arco medeſimo cioè della ſteſſa chiarezza, luce, e degradazion di colore appariva ora più baſſo, ora più alto, alcuna volta coll'altezza medeſima parve, che congiugneſſe una ampiezza ora maggiore ora minore.

IX. L' interior margine dell' arco il più del tempo niente era foſco, o d' altro ſegno diſtinto, ma della ſteſſa luce pallida, di cui era tinto tutto lo ſpazio frappoſto tra l' arco, e l' Orizzonte, il quale ſuol chiamarſi *Chaſma*, *o Voragine*. Così appunto nell' Aurora del 1726. *Margo interior niger, aut fuſcus non erat, ſicut alias; ſed aeque, ac reliqua lucidus ..... Interius ſpatium Chaſma dictum, aut vorago nigerrimum non erat, ut alioquin, ſed pallida luce diluebatur.* Vero è che qualche volta fiſſando bene il guardo mi riuſcì di vedere l' orlo interiore diſtinto languidiſſimamente di color roſſiccio. Dentro al Chaſma non mai mi venne fatto di vedere alcuna ſtriſcia, o verga.

X. Appunto queſt' Aurora è un eccezione del frequente caſo, in cui l' orlo interiore dell' arco vedeſi oſcuro.

XI. L' apparizione, e accenſione delle tra-

vi, o ſtriſce, o verghe ſegue l' ordine dei tempi ſegnati.

6.^{h} 35.^{l} Nell'eſtremità Orientale dell'arco eſteriore nacque una grande, e improvviſa accenſione di luce roſſeggiante, la qual ſi alzava ed andava a finire quaſi nella ſtella dell' Orſa maggiore notata dal Bayero colla lettera α. Le verghe, o ſtriſce erano quaſi inſenſibili Nel tempo ſteſſo la parte Occidentale dell' arco apparve anch' eſſa infiammata ma aſſai meno della prima. La minima accenſione era nel mezzo.

6.^{h} 45.^{l} tutto l' arco apparve più roſſeggiante, e dal ſuo orlo eſteriore come da baſe nacquero 5. o 6. ſtriſce di luce biancheggiante. Più chiare erano queſte ſtriſce nella lor radice, cioè nell' orlo dell' arco. La lor figura era ſimile a quella di un Cipreſſo.

6.^{h} 54.^{l} Nacque nella parte dell' arco Occidentale una infiammazione di luce roſſeggiante diſtinta da quattro ſtriſce, o verghe, le quali erano meno roſſeggianti, o più biancheggianti del fondo.

7.^{h} 18.^{l} Nuova accenſione di quaſi tutto l' arco con aſſaiſſime nuove ſtriſce di luce.

7.^{h} 22.^{l} Apparve un lunghiſſimo raggio, o verga biancheggiante, e nel tempo ſteſſo tutto l' orlo eſteriore dell' arco ſi vedde terminato di una luce più uguale, e di colore ſmorto di roſa. Queſti furono i più

ſen-

ſenſibili Fenomeni delle ſtriſce, o verghe.

XII. Fu così lungi, che la direzione di queſte verghe foſſe rivolta verſo il noſtro Zenith, che anzi eſſe parevano divergenti dall'arco in fuori. Le verghe Occidentali piegavano verſo Occidente, e le Orientali verſo Oriente, dalla qual piegatura eſſe ſi ſcoſtavano tanto, quanto più alte erano le parti dell'arco, ſu cui eſſe poſavano, come ſopra baſe. Se io diceſſi che eſſe erano perpendicolari ſenſibilmente a quelle porzioni di arco, ſu cui poſavano, direi coſa aſſai conforme all'oſſervazione, che di queſto tal fatto ſi potè prendere. Così nell' Aurora ſopraddetta del 1726. *Trabes, quo erant Occidentaliores eo obliquius horizonti inſiſtebant...., interdum figuram formabant ſimillimam nimbis, queis Deorum, & Sanctorum capita ornare ſolent.* (*Tom.* 4. *Acc. Pet. pag.* 106. *in* 107.

XIII. Dalla figura di un Cipreſſo; a cui parevano ſomiglianti que' tratti di luce, ſi può argomentare, che non *eiusdem pene latitudinis eſt unaquaeque virga tam in principio, quam in fine.* Poichè ſi cominciava dal più ſtretto, e da queſto ſi paſſava a larghezza maggiore, dalla quale al più ſtretto ſi faceva ritorno.

XIV. Neppur ſi avverò in queſto Fenomeno, che *aequabilis fere ſplendoris virga*

eſt

eſt quaelibet. Poichè la luce andava ſenſibilmente ſcemando collo ſcoſtarſi, che le parti del trave facevano dall' arco, da cui naſcevano.

XV. La durata, e permanenza di dette verghe fu alquanto maggiore di quella, che comunemente ſi oſſerva. Vi furono di quelle, che fecero più lunga comparſa 2', ovvero di 3'; laddove il Mayer ci atteſta, che *Duratio.... decem circiter minutorum ſecundorum eſſe ſolet ordinarie*. I fili di quelle verghe erano ſenſibilmente rettilinei, e per quanto io ben guardaſſi, niſſun filo mi parve incurvato con ſenſibile curvatura.

Fin quì i più certi, e ſenſibili Fenomeni di queſt' Aurora da me traſcritti ſecondo gli Articoli del Mayer, perchè eſſi vagliano o di riprova, o di eccezione. Alcune circoſtanze reſtano generali, e oſſervate o in tempi non ſegnati, o per tutto lo ſpazio di queſta comparſa; E ſon queſte 1.° Le ſtelle fiſſe apparivano da per tutto in mezzo, ed attraverſo al Fenomeno. 2.° Le accenſioni, o ſtriſce lucide non oltrepaſſarono mai l'altezza di 45.gradi. 3.° verſo le ore 8. cominciò a ſcemare ſenſibilmente il Fenomeno. 4.° Alle 9. e $\frac{1}{2}$ appena reſtava un tale albore, qual vedeſi a crepuſcolo inoltrato. 5. Il giorno dopo, e i ſuſſeguenti ſono ſtati freddi intenſi; ma non dei maggiori di queſt' anno 6.° La

notte

notte del dì 4. di Febbraio fu da alcuni veduto un piccolo albore verſo la ſteſſa parte.

Ora parrebbe, che per ſoddisfare alla curioſità degli uomini eruditi, ſi doveſſe con qualche metodo rintracciar la diſtanza, che tanto da queſto luogo di Oſſervazione, quanto dalla ſuperficie terreſtre ſottopoſta aveva quella luminoſa materia, che ci preſentò sì bello ſpettacolo. Al che fare con eſattezza maggiore, non baſta l'oſſervazione fatta in un luogo ſolo, ma ſe ne richiede almeno una ſeconda fatta in altro paeſe, che differiſca in latitudine quanto ſi poſſa il più. Anzi per eſattezza maggiore ſi richiede non un qualunque altro luogo lontano, ma un altro, il qual foſſe in un cerchio maſſimo terreſtre, il qual paſſaſſe per Firenze, e diſteſo incontraſſe ancora quella ſteſſa cima dell' arco in Firenze oſſervata.

Pure, come ſi sà, lo ſteſſo Mayer nell' Accademia Petropolitana (*tom.* 4. *pag.* 111.) ci ſominiſtra un altro metodo, nel quale colla ſola oſſervazione dell' altezza, e dell' ampiezza Orizzontale, e ſull' Ipoteſi, che l' arco ſia circolare ed il polo di eſſo coincida col polo terreſtre, ſi può calcolare la diſtanza, che ſi cerca. Non avendo io per ora alle mani altri dati fuori di quelli, che baſtano ſolo a queſta ſoluzione, di eſſa mi varrò pel computo delle due cercate diſtanze, aſpettando di corregger queſto computo,

quan-

quando le oſſervazioni altrui mi ſomminiſtreranno un altra altezza, per valermene inſieme colla mia a determinare le diſtanze colla parallaſſi.

Calcolo della diſtanza della cima dell' arco dell' Aurora Boreale oſſervata in Firenze la ſera del dì 3. Febbrajo 1750.

l' altezza dell' arco alle ore 7. 17.' del tempo vero fu oſſervata di 16 in 17.° e l'ampiezza di quaſi 69.° in 70.°

Formula del Mayer $y = \frac{2amg^2q^2}{r^3b^2 - rg^2q^2}$

Il ſen totale $= r$.

Il ſen del complemento della latitudine $= q$.

L'altezza oſſervata dell'arco, o ſuo ſeno $= m$.

Il ſen del complemento della metà dell' ampiezza $= g$.

Il ſen dell' angolo S E N $= b$. (*Vedi la figura di queſt' Opoſcolo*.)

Il terreſtre ſemidiametro $= a$.

La diſtanza dell' occhio S dal Fenomeno E $= y$.

Nel noſtro caſo ſarà

$m = 209$. cioè il ſeno di 17.°

$g = 819$. Eſſendo la metà dell' ampiezza 35.° e il complemento 55.° Onde $g^2 = 670761$.

$q = 722$. Eſſendo la latitudine Fiorentina di 43.° 46.' ſarà il complemento 46.° 14.' Onde $q^2 = 521284$.

r —

r — 1000. Onde $r^3 = 1000000000$.
$b = 892$. Poichè eſſendo l' angolo E N S uguale al complemento della latitudine, che è di 46.° 14.' e l' angolo E S N = 17.° ſarà l' angolo S E N di 116.° 46.' Onde $b^2 = 795664$.

Sarà g^2q^2 tolte 7. note = 34965.
Onde $mg^2q^2 = 10209780$.

Sarà $r^3b^2 = 79566400$. $rg^2q^2 = 34965697$

$r^3b^2 - rg^2q^2 = 44600703$.

Onde $\frac{mg^2q^2}{r^3b^2 - rg^2q^2} = \frac{10209780}{44600703}$

ovvero $= \frac{102}{446}$

Ma il terreſtre Semidiametro ſi fa di 1432 $\frac{1}{2}$ leghe di quelle, di cui 25. fanno un terreſtre grado (*Vedi Mairan, Suite des Mem. an.* 1731. *pag.* 123.) Onde il diametro, cioè $2a = 2865$. Onde la y ſarà =

$\frac{102 \times 2865}{446} = \frac{292230}{446} = 655\,\frac{100}{446}$ leghe = S E

che ridotta a miglia Italiane di 60. per ciaſcun grado terreſtre fanno 1572 $\frac{240}{440}$ miglia.

Indi ſciolto al ſolito il triangolo rettilineo, verrà la diſtanza perpendicolare della materia lucida dalla terreſtre ſuperficie di 308. leghe, cioè di 739. $\frac{1}{5}$ miglior di cui 60. formano

mano la ſteſa di un grado del terreſtre Meridiano.

Queſta diſtanza perpendicolare così calcolata non è molto lontana dalle diſtanze di altre Aurore Boreali calcolate dal Mairan medeſimo col metodo delle parallaſſi. Quella per eſempio, che dal Godin fu oſſervata a Parigi, e dal Bianchini a Fraſcati la ſera del dì 19 d'Ottobre l'anno 1726. col metodo della Parallaſſi fu trovata diſtante dalla terreſtre ſuperficie 266 $\frac{3}{4}$ leghe (*Suit. des Mem. l'an.* 1731. *pag.* 81.)

Ma che dirò io, che nel calcolo fatto di queſta diſtanza ſecondo le ipoteſi di quel Problema un ecceſſo di diſtanza naſce dalla mia Oſſervazione medeſima? Poichè il Problema del Mayer non è generale, ma è legato al ſolo caſo, in cui l'ampiezza dell' arco ſiaſi preſa nel piano Orizzontale. L'equazione che ſerve al ſuo ſcioglimento, naſce giuſto da un triangolo rettangolo, il quale è rettangolo appunto, perchè l'oſſervazione ſi ſuppone fatta nel piano Orizzontale paſſante per l'occhio dell' oſſervatore. Ora il più delle volte accade, che ciò non ſia, per la natura del luogo, in cui ſi oſſerva; e nell' oſſervazion da me fatta, come fedelmente ho eſpoſto, per la vicinanza di alcuni monti, che reſtavano riſpetto a me verſo la tramontana, non mi era poſſibile di mettere in

pra-

pratica quell' Ipoteſi. Per corregger queſto errore, che non è piccolo, mi è convenuto di pigliare un altra ſtrada, e ſciogliere il Problema generalmente in queſto modo.

Sia dunque il terreſtre ſemidiametro $= a$.

Il ſen totale $= s$.

Il ſen dell' altezza oſſervata della cima dell' arco $= b$.

Il ſen di un angolo, che ſia la ſomma del complemento della latitudine, e dell' altezza di que' due punti dell' arco, la cui ampiezza è ſtata oſſervata, e i quali ſiano ugualmente alti $= c$.

Il ſeno di un angolo, che ſia il complemento de' due primi a due retti $= e$.

Il ſen del complemento della latitudine $= f$.

Il ſeno di un angolo, che ſia la differenza tra la latitudine, e l'altezza de' due punti $= g$.

Il ſeno della metà dell' ampiezza $= i$.

Il ſeno del complemento del medeſimo $= h$.

La diſtanza dell' oſſervatore della cima dell' arco $= y$.

Sarà $$y = 2a \times \frac{fbch^2}{si^2e^2 + 2bgeh^2 - sb^2h^2}$$

Ora l' altezza delle montagne, a cui corriſpondevano le inferiori eſtremità dell' arco, è di quaſi 4.° come poſteriormente ho oſſervato. Vero è, che il punto Occidentale aveva una minore altezza di 4.° ma io

pro-

procurai di collocare il piano del quadrante per modo, che il punto Occidentale dell'arco, la cui ampiezza oſſervai, veniſſe ad avere la ſteſſa altezza. Il che biſogna fare per isfuggire una nuova difficoltà, che ridonderebbe nel Problema, ſe i punti foſſer alti inugualmente, e ſe un piano, che per eſſi paſſaſſe, non poteſſe eſſer parallelo all' Orizzonte. Poſte le ipoteſi del primo calcolo ſarà $\frac{fbcb^2}{si^2e^2 + 2bgeb^2 - sb^2b^2} = \frac{835}{3987}$ proſſimamente. Onde ſarà $y = 600. \frac{75}{3987}$ leghe; e laſciando la piccola frazione, può farſi di 600. leghe appunto la diſtanza dell' oſſervatore.

Indi paſſando alla ſoluzione del triangolo, ſi troverà la diſtanza perpendicolare dalla terreſtre ſuperficie di leghe $272\frac{1}{2}$, intendendo ſempre di quelle leghe, di cui 25. formano la lunghezza di un grado medio del terreſtre Meridiano.

Or queſta diſtanza così corretta, come la mia Oſſervazion richiedeva, differiſce di ſole leghe $5\frac{3}{4}$ dalla diſtanza dell' Aurora Boreale del dì 19. Ottobre 1726. calcolata dal celeberrimo Signor Mairan col più certo metodo delle Parallaſſi. Che ſi rifletta, che la diſtanza del Signor Mairan ſia di fatto minor della vera per eſſerſi con molta ragione

traſcurate le rifrazioni, e la mia per contrario maggior della vera per la ſteſſa ragione delle rifrazioni; la quale ſecondo i diverſi metodi, e i diverſi caſi può ben produrre un effetto contrario, ſi troverà tra queſti due Fenomeni un mirabile conſentimento nelle diſtanze dalla terra.

Se io poteſſi riteſſer tutto il calcolo, valendomi della ſeconda oſſervazione dell' arco, il quale accoppiava una maggiore ampiezza ad una altezza minore, io troverei la la ſeconda diſtanza minor della prima. Ma l' ampiezza di queſto ſecondo arco non potè ben determinarſi. Eſſa era certamente maggiore di 70.° e di più di un grado. Nondimeno poſſiamo argomentare dal creſcere, che fece ſenſibilmente l' ampiezza, e ſcemar l' altezza, che tutto il Fenomeno a noi ſenſibilmente ſi accoſtaſſe. Di che un nuovo argomento puote ſomminiſtrarci il più chiaro riſplendore, che fece l' arco ſecondo ſopra del primo, il che io feci ſcrivere nell' atto dell' oſſervazione con queſte parole = *Queſto ſecond' arco all' ampiezza maggiare di* 70.° *uniſce un maggior chivro del primo, ma un altezza minore, cioè di quaſi* 15.°

OSSERVAZIONE
DELL' AURORA BOREALE

Comparſa la notte del dì 26. Agoſto 1750. fatta dallo ſteſſo Autore,

---

DI queſta Aurora Boreale, la quale riſpetto a queſto luogo fece una breve, e piccola comparſa, io ho potuto notare le coſe ſeguenti.

I. Alle ore 7. $\frac{1}{2}$ di queſto giorno guardando io verſo l' Occaſo mi parve il crepuſcolo troppo diſteſo verſo Tramontana, onde ſoſpettando, che quello foſſe un principio di Aurora Boreale, cominciai a riguardare più fiſſamente verſo Tramontana. Oſſervai, che o ſotto la Stella Polare in gran vicinanza all' Orizzonte, o anche verſo $\frac{1}{4}$ di Nord-eſt ſi ſcorgeva una certa luce bianchiccia aſſai irregolare, la quale ora ſi accoſtava, ora ſi diſcoſtava da Tramontana. Il vederſi una tal luce affatto ſeparata dal Crepuſcolo accreſceva il mio ſoſpetto, che quella poteſſe eſſere un Aurora Boreale. Sino alle 8 $\frac{1}{4}$ queſto Fenomeno mi apparve, come ho detto. L' eſtremo caldo di quella giornata poteva far credere, che quell' accenſione foſſe una meteora a noi molto vicina.

II. Tra

II. Tra le ore 9. e le 10. come più di uno oſſervò in Firenze, quella luce crebbe aſſai ſenſibilmente, e mantenerſi verſo l' occaſo eſtivo. Vedevanſi de' getti improvviſi di luce bianchiccia, che ſalivano a qualche altezza ſovrà l' Orizzonte, e oltrepaſſavano in altezza l' eſtrema ſtella della coda dell' Orſa Maggiore. Ciò avvenne alle 9. $\frac{1}{2}$ in circa verſo le ore 10. pur verſo il ponente eſtivo ſeguì una grande accesſione eſtiva roſſiccia, e irregolare.

III. Alle ore 10. e dieci minuti queſt' accenſione ſi eſtinſe, e rimaſe un arco mal terminato, e di luce così degradata, che non era poſſibile oſſervarne l' altezza. La cima di queſt' arco da Ponente ſi accoſtava ſenſibilmente verſo Tramontana, e alle ore 10$\frac{3}{4}$ la cima riguardava quaſi direttamente la Stella Polare. La luce di queſt' arco dove eſſa affatto finiva, verſo le 10$\frac{3}{4}$ aveva un altezza dall' Orizzonte uguale all' altezza di quella ſtella dell' Orſa Maggiore chiamata nel Catalogo Britannico. *In ventre in Quadrilatero prima*, e contraſſegnata dal Baiero colla lettera B.

IV. La cattiva terminazione dell' arco m' mpedì pure dall' oſſervarne l' ampiezza. I moti, che riſpetto al luogo dell' oſſervazioe reſtavano a Tramontana mi toglievano qualche porzione di queſt' ampiezza medeſima.

V. I raggi deboliſſimi, che dal confine dell' arco ſi ſpiccavano fuori di eſſo, avevano ſenſibilmente una direzione perpendicolare all' iſteſſo arco. Qualche raggio ſi ſteſe fino alla fiſſa dell' Orſa Maggiore, che è detta nel Catalogo Britannico *Super coſtis in quadrilatero ſecunda*, e che dal Baiero è notata colla lettera α. La prima di queſto quadrilatero già dianzi nominata, chiaramente traſpariva per mezzo a quel raggio. Torno a ripetere che quel raggio era deboliſſimo di luce, ed eſſendo queſta fiſſa che traſpariva, di ſeconda grandezza, non è gran coſa, che traſpariſſe. Se nelle parti di maggior latitudine, dove queſto Fenomeno avrà fatta una più bella comparſa, qualcuno alla ſteſs' ora ſi ſarà trovato; che oſſervaſſe l' altezza dell' eſtremità dell' arco, queſte due Oſſervazioni potranno ſomminiſtrare la diſtanza della materia di queſt' Aurora col metodo delle Parallaſſi. Il metodo del Mayer per la cattiva terminazione dell' arco non ſi è potuto adoperare per computarne la diſtanza.

TEO-

T E O R E M I

D E L P A D R E

D. FRANCESCO MARIA

D E' R E G I

DEI CHERICI REGOLARI DI S. PAOLO

DETTI BERNABITI

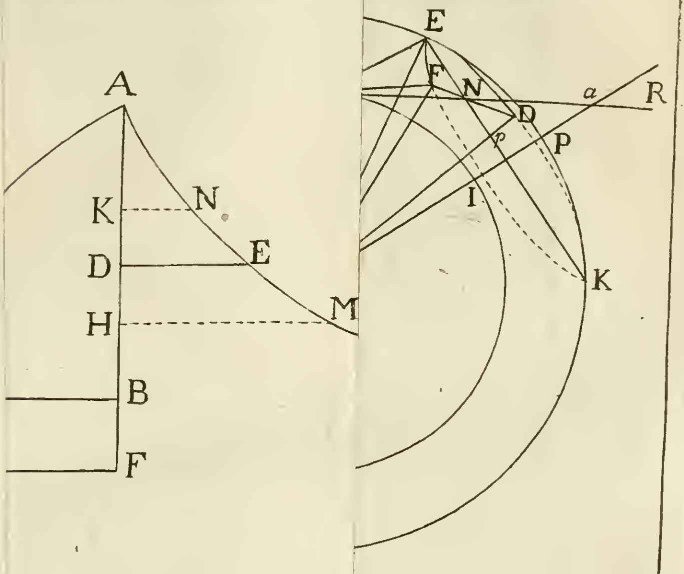
PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA

IN MILANO

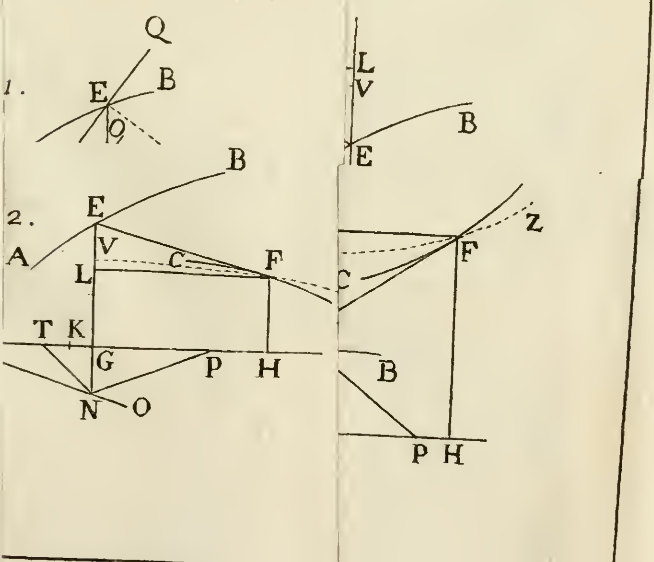
NELLA UNIVERSITA' ARCIMBOLDICA

DI S. ALESSANDRO.

la lettera Prima *rora Boreale*

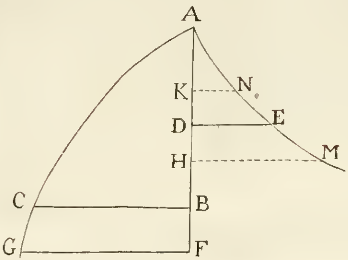


Per la

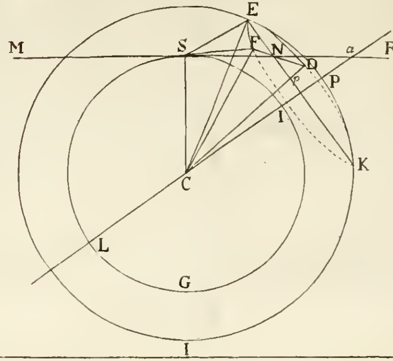


ma
Ch

Per la lettera Prima



Problema per l'Aurora Boreale



Per la lettera Seconda

Fig. 1.

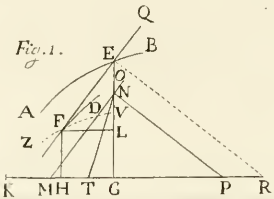


Fig. 3.

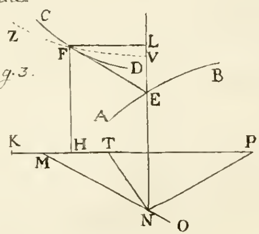


Fig. 2.

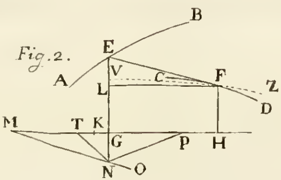
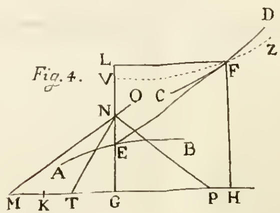


Fig. 4.



T E O R E M A I.

IL perimetro di qualunque figura piana rettilinea, a cui può circonſcriverſi, e inſcriverſi un cerchio, è alla circonferenza del cerchio circoſcritto, come il rettangolo del perimetro nel raggio del cerchio inſcritto, o ſia come la doppia area della figura rettilinea iſcritta al rettangolo della circonferenza minore nel raggio della maggiore.

DIMOSTRAZIONE

Sia la circonferenza del cerchio circoſcritto $= C$

——— ——— ——— ——— inſcritto $= c$

——— il perimetro della figura rettilinea $= p$

——— ——— il raggio del cerchio maggiore $= R$

——— ——— ——— ——— del minore $= r$

ſarà $C : c = R : r$

ma per il Teor. I. del Chiariſ. Sig. Zanotti $c : p = \frac{cr}{2}\ \frac{pr}{2}$, e $Cc : cp = \frac{Rcr}{2} : \frac{pr^2}{2}$,

dunque $C : p = Rc : pr$

 co-

COROLLARIO I.

Se ad un triangolo equilatero circoſcriveſi, ed iſcriveſi un cerchio, è $r = \frac{R}{2}$, e per conſeguenza $c = \frac{1}{2}C$; eſſendo adunque $C : p = R c : p r$, ſarà ancora $C : p = \frac{1}{2} C R : p r$; ma $\frac{CR}{2}$ è l'area del cerchio circoſcritto, $p r$ la doppia area del triangolo equilatero, o ſia l' area dell' eſagono nel medeſimo cerchio inſcritto; dunque la circonferenza del cerchio circonſcritto al triangolo equilatero è al perimetro del triangolo inſcritto, come l'area d' eſſo cerchio all' area dell' eſagono.

COROLLARIO II.

Quindi ſarà la ſuperficie del priſma, a cui può circoſcriverſi, ed inſcriverſi un cilindro, alla ſuperficie del cilindro circoſcritto, eſcluſe le baſi, come la doppia baſe del priſma al rettangolo fatto dal raggio della baſe del cilindro circoſcritto nella circonferenza della baſe del cilindro inſcritto.

COROLLARIO III.

Che ſe il priſma nel cilindro inſcritto ha per baſe un triangolo equilatero, ſarà la ſuperficie del cilindro alla ſuperficie del

priſma

priſma, non conſiderate le baſi, come la baſe del cilindro alla baſe del priſma ordinato, formato ſopra l'eſagono nella medeſima baſe del cilindro inſcritto *Cor. I.*

T E O R E M A II.

L' area di qualunque figura piana rettilinea, a cui può circonſcriverſi, e inſcriverſi un cerchio; è all' area del cerchio circoſcritto, come il parallelepipedo, la di cui altezza è il perimetro, e la baſe il quadrato del diametro del cerchio inſcritto, al parallelepipedo, la di cui altezza è la circonferenza minore, e la baſe il quadrato del diametro maggiore:

D I M O S T R A Z I O N E

Sia l'area del cerchio circoſcritto $= A$
—— —— —— —— inſcritto $= a$
—— —— della figura inſcritta $= \mathrm{a}$
la circonferenza del cerchio circoſcr. $= C$
—— —— —— —— inſcritto $= c$
—— —— il perimetro della figura $= p$
il Diametro del cerchio maggiore $= D$
—— —— —— —— minore $= d$

Sarà $A : a = D^2 : d^2$

ma per il Teor. I.
del Sig. Zanotti —— $a : \mathrm{a} = c : p$

ed $Aa : a\mathrm{a} = D^2 c : d^2 p$

dunque $A : \mathrm{a} = D^2 c : d^2 p$

Co-

COROLLARIO I.

Inſcritto, e circoſcritto un cerchio ad un triangolo equilatero, eſſendo allora $d = \frac{D}{2}$ ſarà ancora $c = \frac{C}{2}$; onde ſarà $A : a = \frac{CD^2}{2} : \frac{pD^2}{4} = 2\,C\,D^2 : p\,D^2 = 2\,C : p$; dunque l' area del cerchio circoſcritto all' area dell' equilatero inſcritto è in doppia ragione di quella, che ha la circonferenza del cerchio circoſcritto al perimetro del triangolo; ma la circonferenza ſta al perimetro, come l'area del cerchio circoſcritto all' area dell' eſagono inſcritto *Cor. I. Teor. I.* dunque l' area del cerchio circoſcritto è all' area del triangolo, come la doppia area del medeſimo cerchio circoſcritto all' area dell' eſagono inſcritto.

COROLLARIO II.

Ma ſe un cerchio inſcriveſi, e circonſcriveſi ad un quadrato; ſiccome $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$, e però $c\,D^2 = \frac{CD^2}{\sqrt{2}}$ ſarà $A : a = \frac{CD^2}{\sqrt{2}} : \frac{D^2 p}{2}$; ma $p = \frac{4D}{\sqrt{2}}$ dunque $A : a = \frac{CD^2}{\sqrt{2}} : \frac{4D^3}{2\sqrt{2}} = CD^2 : 2\,D^3 = \frac{C}{2} : D$.

COROLLARIO. III.

Oppure ad un eſagono, poichè $D^2c = CdD$ ſarà $A : a = C\,d\,D : d^2 p$; ma $p = 3\,D$; dunque $A : a = C\,d\,D : 3\,D\,d^2 = C : 3\,d$, dunque ſarà l' area del cerchio circoſcritto all' area dell' eſagono inſcritto, come la circonferenze di eſſo cerchio al perimetro dell' eſagono inſcritto nel cerchio minore; ma per il *Coroll. I. Teor. I.* l' area del cerchio circoſcritto è all' area dell' eſagono inſcritto, come la circonferenza di detto cerchio al perimetro del triangolo equilatero parimente inſcritto; dunque il perimetro del triangolo equilatero inſcritto nel cerchio maggiore è eguale al perimetro dell' eſagono nel cerchio minore inſcritto.

COROLLARIO IV.

Quindi ſe in un cerchio inſcriveraſſi un eſagono, e nell' eſagono un altro cerchio, ed in queſto un altro eſagono, e così in infinito, ſaranno tanto li perimetri, quanto le aree degli eſagoni in queſti cerchi inſcritti in continua proporzione; imperciocchè inſcritto in ciaſcun cerchio un triangolo equilatero, e denominato E il perimetro dell' eſagono maggiore, *E* quello del ſecondo, e quello del terzo T, il perimetro del triangolo maggiore, *T* quello del ſecondo, *t*

quel-

quello del terzo, ſarà E : T $=$ *E* : *T* $= 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$; ma per il *Coroll. prec.* T $=$ *E*, dunque E : *E* $=$ *E* : *T* : parimente ſarà *E* : *T* $=$ *E* : *t*; ma per l' iſteſſo Corollario *T* $=$ *e*, dunque *E*:*e* $=$ *e*:*t* $=$ *E*:*T*, e però E : *E* $=$ *E*: *e*, dunque li perimetri E, *E*, *e* ſono in continua proporzione, e ſiccome le aree ſono in duplicata ragione de' perimetri, ſaranno anch' eſſe in continua proporzione; ma le circonferenze de' cerchi, e li perimetri de' triangoli ſono come li perimetri degli eſagoni, ſiccome le riſpettive aree, come le aree degli eſagoni, dunque ſono in continua proporzione; anzi qualunque ſianſi le figure ſimili in queſti circoli inſcritte, ſaranno in continua proporzione tanto i loro perimetri, quanto le loro aree. Continueranno adunque li perimetri degli eſagoni poſto il primo $= 1$., ſiccome pure di tutte le ſimili figure ſopra notate queſta ſerie $1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{27}}{8}, \frac{9}{16}$ ec. in infinito, e le aree queſt' altra $1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$ ec. in infinito.

COROLLARIO V.

Che ſe intenderemo un diametro, che divida per metà gli angoli tanto degli eſagoni

goni, quanto de' triangoli equilateri, ed intorno a queſto concepiremo rivolgerſi sì li ſemicircoli, come li ſemi eſagoni, e ſemitriangoli, da primi ſi genereranno delle sfere, da' ſecondi de' corpi compoſti di due coni, ed un cilindro da' terzi de' coni, le ſuperficie de' quali corpi ſaranno come le aree delle figure generanti, dovendo eſſere in ragione duplicata de' lati omologhi, e le ſolidità come li cubi de' perimetri, dovendo eſſere in triplicata ragione de' medeſimi lati omolghi, onde le ſolidità continueranno queſta ſerie $l, \frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{27}{64}, \frac{27\sqrt{27}}{512}, \frac{729}{4096}$ ec. in infinito; il che verificheraſſi ancora di tutti gli altri corpi ſimili, che in queſte sfere poſſono inſcriverſi, come è chiaro,

TEOREMA III.

La ſuperficie di un corpo, a cui può circoſcriverſi, e inſcriverſi la sfera, è alla ſuperficie della sfera circonſcritta in ragione compoſta di quella, che ha la ſuperficie del corpo alla ſuperficie della sfera inſcritta, e di quella, che ha il quadrato del diametro della sfera minore al quadrato del diametro della maggiore.

DIMOSTRAZIONE

Sia la ſuperficie della sfera circoſcritta $= A$
—— —— —— —— inſcritta $= a$
—— —— del corpo inſcritto $= \mathrm{a}$
il diametro della sfera circoſcritta $= D$
—— —— —— —— inſcritta $= d$

ſarà $A : a = D^2 : d^2$

ma per il Teor. II.
del Sig. Zanotti $a : \mathrm{a} = \frac{da}{6} : \frac{d\mathrm{a}}{6}$

onde $Aa : a\mathrm{a} = \frac{daD^2}{6} : \frac{\mathrm{a}d^3}{6}$

dunque $A : \mathrm{a} = aD^2 : \mathrm{a}d^2$

COROLLARIO I.

Se il corpo, a cui è inſcritta, e circoſcritta una sfera, è un cono equilatero, è in tal caſo $d = \frac{D}{2}$ onde ſi ha $A : \mathrm{a}$

$aD^2 : \frac{\mathrm{a}D^2}{4} = a : \frac{\mathrm{a}}{4}$; ma $a : \mathrm{a} = 4 : 9$, e perciò $a = \frac{4\mathrm{a}}{9}$; dunque $A : \mathrm{a} = \frac{4\mathrm{a}}{9} : \frac{\mathrm{a}}{4} = 16 : 9$.

COROLLARIO II.

Ma ſe è un cilindro quadrato, allora eſſendo $D^2 = 2d^2$, ed $a = \frac{2\mathrm{a}}{3}$ ſi avrà $A : \mathrm{a} = \frac{2\mathrm{a}D^2}{3}$

$\mathrm{a}d^2 = \frac{2D^2}{3} : d^2 = \frac{4d^2}{3} : d^2 = 4 : 3$. Che ſe la

ſu-

ſuperficie del cilindro conſidereraſſi ſenza le baſi, eguali ad un terzo di eſſa, ſarà $A: = \frac{2a}{3} = \frac{2aD^2}{3} : \frac{2ad^2}{3} = D^2 : d^2 = 2 : 1$.

COROLLARIO III.

Quindi eſſendo la ſuperficie della sfera circoſcritta alla ſuperficie del cilindro quadrato inſcritto, come $4:3$, e la ſuperficie della sfera circoſcritta a quella del cono equilatero inſcritto come $16:9$ o ſia $4:\frac{9}{4}$ ſarà la ſuperficie del cilindro a quella del cono come $3 . \frac{9}{4}$; ma $3:\frac{9}{4}=4:3$, dunque la ſuperficie del cilindro è mezza proporzionale tra la ſuperficie della sfera circoſcritta, e del cono equilatero inſcritto.

COROLLARIO IV.

Ed eſſendo la ſuperficie della sfera circoſcritta alla ſuperficie intiera del cilindro quadrato come $4:3$, e quella a queſta ſenza le baſi come $2:1:0\ 4.:2$, ſono eſſe in proporzione aritmetica, continova, cioè come 4, 3, 2.

COROLLARIO V.

Inſcritta, e circoſcritta una sfera ad un quadrato rombo conico ſi ha $d=\frac{D}{\sqrt{2}}$, ed $a: a = d: D$; dunque ſarà $A: a = d D^2: D d^2 = D:d=\sqrt{2}:1$, cioè la ſuperficie della sfera circoſcritta

ſcritta è alla ſuperficie del rombo quadrato conico inſcritto, come il di lei diametro al diametro della sfera inſcritta, o come il diametro della sfera circonſcritta al lato del quadrato, che genera il ſuddetto rombo, o finalmente come la radice di due a uno.

COROLLARIO VI.

E poichè $A : a = D : d$, ed $a : a = d : D$. e permutando $a : a = D : d$: dunque $A : a = a : a$, cioè la ſuperficie del rombo ſodo ſarà mezza proporzionale tra la ſuperficie della sfera circoſcritta, ed inſcritta.

COROLLARIO VII

Che ſe una sfera circonſcriveſi, ed inſcriveſi ad un tetraedro; ſiccome $a = \frac{2\,D^2}{\sqrt{3}}$ e $d = \frac{D}{3}$, e perciò $a = \frac{A}{9}$ ſi avrà $A : a = \frac{AD^2}{9} : \frac{2D^4}{9\sqrt{3}} = A : \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$; ma poſta la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta $= C$ ſarà $A = C\,D$, dunque $A : a = C\,D : \frac{2D^2}{\sqrt{3}} = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$.

COROLLARIO VIII.

Ma ſe il corpo a cui è inſcritta, e circoſcritta una sfera è un ottaedro, ſi ha

$a =$

$a = D^2\sqrt{3}$, e $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, onde $a = \frac{A}{3}$ dunque ſarà $A : a = \frac{AD^2}{3} : \frac{aD^2}{3} = A : D^2\sqrt{3}$, e denominata la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circoſcritta $= C$ eſſendo $A = CD$, ſarà $A : a = CD : D^2\sqrt{3} = C : D\sqrt{3}$.

COROLLARIO IX.

E ſiccome inſcritta, e circonſcritta una sfera ad un cubo, $a = 2D^2$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$ e $aD^2 = \frac{AD^2}{3}$ ſi avrà $A : a = \frac{AD^2}{3} : \frac{aD^2}{3} = A : 2D^2$; ma ſuppoſta la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta $= C$, eſſendo $A = CD$, ſarà $A : a = CD : 2D^2 = C : 2D$, e poichè come $C : 2D$, così il cerchio maſſimo della sfera al quadrato in eſſo inſcritto *Cor. II. Teor. II.*, dunque la ſuperficie della sfera circonſcritta è alla ſuperficie del cubo, come il di lei cerchio maſſimo al quadrato in eſſo inſcritto.

COROLLARIO X.

Eſſendo una sfera circoſcritta, ed inſcritta ad un icoſaedro; $a = \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$, e $d = \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$ onde $aD^2 = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$, dunque

$A:a = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} : a \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$
$= A : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$, ma ſe la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta diceſi C, $A = CD$, dunque $A : a = CD : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$.

COROLLARIO XI.

Se finalmente la sfera circoſcriveſi e inſcriveſi ad un Dodecaedro eſſendo $a = \frac{10D^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e $d = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$ ſarà a $D^2 = A \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}}$ onde $A : a = A \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} : a \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} = A : \frac{10D^2}{\sqrt{20+2\sqrt{5}}}$; che ſe ſi ſuppone la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta $= C$, $A = CD$; dunque $A : a = CD : \frac{10D^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = C : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

COROLLARIO XII.

Quindi ſarà la ſuperficie del tetraedro alla ſuperficie dell' ottaedro, come 2 : 3, imperciocchè, denominando i corpi, e la sfera circoſcritta per le loro lettere inizia-

li,

li, il che oſſerveraſſi ancor ne' ſeguenti Corollari, ſarà

$$T ; S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : O = C : D\sqrt{3}$$

dunque $T : O = \frac{2D}{\sqrt{3}} : D\sqrt{3} = 2D : 3D = 2 : 3$

COROLLARIO XIII.

La ſuperficie del tetraedro alla ſuperficie del cubo o eſaedro come $1 : \sqrt{3}$, eſſendochè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : E = C : 2D$$

dunque $T : E = \frac{2D}{\sqrt{3}} : 2D = 2D : 2D\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$.

COROLLARIO XIV.

La ſuperficie del tetraedro alla ſuperficie dell'icoſaedro come $5 + \sqrt{5} : 15$, eſſendochè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$$

dunque $T : I = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{5\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = 5 + \sqrt{5} : 15$

COROLLARIO XV.

Finalmente ſarà la ſuperficie del tetraedro

alla ſuperficie del Δodecaedro come $1 : \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

imperocchè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $T : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{5}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$= 1 : \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XVI.

Paragonata la ſuperficie dell' ottaedro alla ſuperficie del cubo ſarà quella a queſto, come $\sqrt{3} : 2$ mentre

$$O : S = D\sqrt{3} : C$$

$$S : E = C : 2D$$

dunque $O : E = D\sqrt{3} : 2D = \sqrt{3} : 2$.

COROLLARIO XVII.

E la ſuperficie dell' ottaedro a quella dell' icoſaedro come $5+\sqrt{5} : 10$, perchè

$$O : S = D\sqrt{3} : C$$

$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$$

dunque $O : I = D\sqrt{3} : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} = 1 : \frac{10}{5+\sqrt{5}} =$

$5 \sqrt{5} : 10$

CO-

COROLLARIO XVIII.

Per ultimo la ſuperficie dell' ottaedro a quella del Δodecaedro, come $\sqrt{3} : \frac{10}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

imperocchè $O : S = D\sqrt{3} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

dunque $O : \Delta = D\sqrt{3} : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{3} : \frac{10}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XIX.

La proporzione della ſuperficie del cubo, o eſaedro a quella dell' icoſaedro ſarà come $5 + \sqrt{5} : 5\sqrt{3}$

perchè $E : S = 2D : C$

$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$$

dunque $E : I = 2D : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = 1 : \frac{5\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$

$= 5 + \sqrt{5} : 5\sqrt{3}$.

COROLLARIO XX.

E quella della ſuperficie del cubo alla ſuperficie del Δodecaedro come $1 : \frac{5}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

imperciocchè $E : S = 2D : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

dunque $E : \Delta = 2D : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

$= 1 : \frac{5}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XXI.

E per fine ſtarà la ſuperficie dell' icoſaedro a quella del Δodecaedro, come $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{5}}}$ o come $\sqrt{30+6\sqrt{5}} : 5+\sqrt{5}$ imperocchè $I : S = \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $I : \Delta = \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{30+6\sqrt{5}} : 5+\sqrt{5}.$$

T E O R E M A IV.

La ſolidità del corpo, a cui può circoſcriverſi, e inſcriverſi la sfera è alla ſolidità della sfera circoſcritta in ragione compoſta della ragione, che ha la ſuperficie del corpo alla ſuperficie della sfera inſcritta, e di quella, ohe ha il cubo del diametro minore al cubo del diametro maggiore.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sia la ſolidità della sfera circoſcritta = S
—— —— —— —— inſcritta = s
—— —— —— del corpo = ſ
il diametro della sfera circoſcritta = D
—— —— —— —— inſcritta = d
ſuperficie della sfera circoſcritta = A
—— —— —— —— inſcritta = a
—— —— —— —— del corpo = a

Sarà S : s = $D^3 : d^3$

ma per il Teor. II.
del Sig. Zanotti —— s : ſ = a : a
onde sS : ſs = $aD^3 : \mathrm{a}d^3$
dunque S : ſ = $aD^3 : \mathrm{a}d^3$

COROLLARIO I.

Poſto, che il corpo a cui è inſcritta, e circoſcritta una sfera, ſia un cono equilatero, eſſendo $a : \mathrm{a} = 4 : 9$, e $d = \frac{D}{2}$ ſarà $a = \frac{4\mathrm{a}}{9}$, e $d^3 = \frac{D^3}{8}$; dunque S:ſ = $\frac{4\mathrm{a}D^3}{9} : \frac{\mathrm{a}D^3}{8} = \frac{4}{9} : \frac{1}{8} = 32 : 9$.

COROLLARIO II.

Che ſe ſarà un cilindro quadrato; poichè $a = \frac{2\mathrm{a}}{3}$, $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$, e perciò $d^3 = \frac{D^3}{\sqrt{8}}$ ſi avrà

$S:ſ = \frac{2aD^3}{3} : \frac{aD^3}{\sqrt{8}}$; dunque $S:ſ = \frac{2}{3} : \frac{1}{\sqrt{8}}$ $= 2\sqrt{8} : 3 = \sqrt{32} : 3$. Quindi eſſendo la ſolidità del cono equilatero a quella della sfera $= 9 : 32 = \frac{9}{8} : 4$ e la ſolidità di queſta a quella del cilindro quadrato $= \sqrt{32} : 3 = 4 : \frac{6}{\sqrt{8}}$ ſarà la ſolidità del primo a quella del ſecondo $= \frac{9}{8} : \frac{6}{\sqrt{8}}$; ma $\frac{9}{8} : \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{8}} : 4$; dunque le ſolidità della sfera, cilindro quadrato, e cono equilatero in eſſa inſcritti continovano queſta proporzione $\frac{4}{\sqrt{8}}\frac{9}{8}$

COROLLARIO III.

Ma ſe è un rombo quadrato conico, ſiccome $a : a = d : D$, e $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$; $S:ſ = dD^2 : Dd^2 = D^2 : d^2 = D^2 : \frac{D^2}{2} = 2 : 1$; dunque $S:ſ = 2 : 1$.

COROLLARIO. IV.

Quindi eſſendo la ſuperficie della sfera circoſcritta a quella del rombo, come $\sqrt{2} : 1$, *Cor. V. Teor. III.* e la ſolidità dell'una alla ſolidità dell' altro, come $2 : 1$ ſono le ſuperficie, come le radici delle ſolidità.

COROLLARIO V.

Saranno in oltre le ſolidità della sfera

cir_

circoſcritta, del rombo, e del cono retto inſcritti in continova proporzione, cioè come 4, 2, 1.

COROLLARIO VI.

Inſcritta, e circoſcritta la ſfera ad un tetraedro, ſarà $a = \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$ $d = \frac{D}{3}$ e per conſeguenza $a = \frac{A}{9}$ dunque $S : ſ = \frac{AD^3}{9} : \frac{2D^5}{27\sqrt{}}$ $= A : \frac{2D^2}{3\sqrt{3}}$; ma poſta la circonferenza del cerchio maſſimo della ſfera circoſcritta $= C$, $A = CD$, dunque $S : ſ = CD : \frac{2D^2}{3\sqrt{3}}$ $= C : \frac{2D}{3\sqrt{3}}$

COROLLARIO VII.

Onde eſſendo la ſuperficie della ſfera a quella del tetraedro, come $C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$ *Car. VII. Teor. III.* e la ſolidità di quello alla ſolidità di queſto, come $C : \frac{2D}{3\sqrt{3}}$, è la ragione della ſolidità della ſfera circoſcritta alla ſolidità del tetraedro inſcritto tripla della ragione, che ha la ſuperficie dell' iſteſſa ſfera alla ſuperficie del tetraedro.

COROLLARIO VIII.

Se è inſcritta e circoſcritta la sfera ad un ottaedro; $a = D^2\sqrt{3}$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, onde $a = \frac{A}{3}$; dunque $S : ſ = \frac{AD^3}{3} : \frac{D^5}{3} = A : D^2$; ma indicata per C la circonferenza del cerchio maſſimo dalla sfera circoſcritta, $A = CD$; dunque $S : ſ = CD : D^2 = C : D$.

COROLLARIO IX.

E' la metà della ſolidità della sfera circoſcritta del rombo *Cor. III.* ſarà la ſolidità di queſto alla ſolidità dell'ottaedro come $\frac{C}{2} : D$, o $C : 2D$.

COROLLARIO X.

Ma eſſendo la ſuperficie della sfera alla ſuperficie del cubo inſcritto, come $C : 2D$, il cerchio maſſimo della sfera al quadrato in eſſo inſcritto, come $C : 2D$, *Coroll. IX. Teor. III.* ſarà la ſolidità del rombo alla ſolidità dell'ottaedro, come la ſuperficie della sfera alla ſuperficie del cubo inſcritto, come il cerchio maſſimo della sfera al quadrato inſcritto.

COROLLARIO XI.

Inſcritta, e circoſcritta la sfera al cubo

a =

$a = 2D^2$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, e però $a = \frac{A}{3}$; dunque $S : ſ = \frac{AD^3}{3} : \frac{2D^3}{3\sqrt{3}} = A : \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$, e poichè nominata la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circoſcritta C, $A = CD$, dunque $S : ſ = CD : \frac{2D^2}{\sqrt{3}} = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$; ma ancora la ſuperficie della sfera è alla ſuperficie del tetraedro come $C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$ *Corol. VII. Teor. III.* dunque la ſuperficie della sfera è alla ſuperficie del tetraedro, come la ſolidità della sfera alla ſolidità del cubo.

COROLLARIO XII.

O all' icoſaedro; eſſendo $a = \frac{10D^2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$ e $d = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$, onde $a\,D^2 = A \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$ ſi avrà $S : ſ = AD \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} \times d = A : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} \times d$; ma ſe la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta diceſi C, $A = CD$; dunque $S : ſ = CD : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} \times d = C : \frac{10\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} \times d$ e ſoſtituendo per d il ſuo valore egua-

le $d = \frac{3D+\sqrt{D5}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$, e attualmente moltiplicando, e riducendo i termini alla ſua minima denominazione.

$$S : ſ = C : \frac{6D+2D\sqrt{5}}{\sqrt{10+\sqrt{20}}+\sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}}$$

$$= C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{20}}}$$

COROLLARIO XIII.

O per ultimo al Δodecaedro; poichè $a = \frac{10D^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, e $d = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$ ſarà $aD^2 = A \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}}$ dunque $S : ſ = AD \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} : \frac{10D^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times \frac{14D^2+D^2\sqrt{180}}{30+\sqrt{180}} \times d = A : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times d$; ma poſta la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circoſcritta $= C$, $A = CD$ dunque $S : ſ = CD \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times d = C : \frac{10}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times d$, e ſoſtituendo in luogo di d il ſuo valore eguale $d = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{30+\sqrt{180}}}$, e attualmente moltiplicando, e riducendo a minori termini il prodotto $S : ſ = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{\frac{1}{5}}}}$

COROLLARIO XIV.

Sarà adunque la ſolidità del tetraedro alla ſolidità dell' ottaedro, come $2 : \sqrt{27}$.

perchè $T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$S : O = C : D$

dunque $T : O = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : D = 2 : 3\sqrt{3} = 2 : \sqrt{27}$

COROLLARIO XV.

Ma la ſuperficie del tetraedro ſta a quella dell' ottaedro, come $2 : 3$, *Coroll. XII. Teor. III.* dunque la ſuperficie di quello è alla ſuperficie di queſto come due alla radice cubica di ventiſette, e la ſolidità del primo alla ſolidità del ſecondo, come due alla radice quadrata di ventiſette.

COROLLARIO XVI.

E la ſolidità del tetraedro alla ſolidità del cubo, come $1 : 3$, imperciocchè

$T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$S : E = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$

dunque $T : E = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : \frac{2D}{\sqrt{3}} = 1 : 3$.

COROLLARIO XVII.

Quindi eſſendo la ſuperficie del tetraedro a quella del cubo come $1 : \sqrt{3}$. *Coroll. XVII. Teor. III.* le ſuperficie di queſti due corpi ſono come le radici delle loro ſolidità.

COROLLARIO XVIII.

La ſolidità del tetraedro alla ſolidità dell' icoſaedro, come $1 : \frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{\sqrt{10+\sqrt{20}}+\sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}}$

poichè $T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$$S : I = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}$$

dunque $T : I = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}$

$= 1 : \frac{9\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{10+\sqrt{20}}+\sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}}$

COROLLARIO XIX.

La ſolidità del tetraedro alla ſolidità del dodecaedro come $1 : \frac{9+3\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$, perchè

$$T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $T : \Delta = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$

$= 1 : \frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{9+3\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$

co-

COROLLARIO XX.

La ſolidità dell'ottaedro alla ſolidità del cubo come $\sqrt{3} : 2$ mentre

$$O : S = D : C$$

$$S : E = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$$

dunque $O : E = D : \dfrac{2D}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 2$

COROLLARIO XXI.

Ma la ſuperficie dell' ottaedro è alla ſuperficie del cubo, come $\sqrt{3} : 2$ *Cor. XVI. Teor. III.* dunque le ſuperficie di queſti due corpi ſono come le loro ſolidità.

COROLLARIO XXII.

La ſolidità dell'ottaedro alla ſolidità dell' icoſaedro, come $1 : \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$, poichè

$$O : S = D : C$$

$$S : I =: C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$$

dunque $O : I = D : \dfrac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$

$$= 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$$

COROLLARIO XXIII.

La ſolidità dell'ottaedro alla ſolidità del Δodecaedro come $1 : \frac{3\dagger\sqrt{5}}{\sqrt{3}\dagger\sqrt{\frac{3}{5}}}$, imperciocchè

$$O : S = D : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D\dagger D\sqrt{5}}{\sqrt{3}\dagger\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $O : \Delta = D : \frac{3D\dagger D\sqrt{5}}{\sqrt{3}\dagger\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{3\dagger\sqrt{5}}{\sqrt{3}\dagger\sqrt{\frac{3}{5}}}$

COROLLARIO XXIV.

La ſolidità del cubo alla ſolidità dell'icoſaedro, come $1 : \frac{3\sqrt{3}\dagger\sqrt{15}}{\sqrt{10\dagger\sqrt{20}}\dagger\sqrt{2\dagger\sqrt{\frac{4}{5}}}}$ eſſendochè $E : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$

$$S : I = C : \frac{3D\dagger D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}\dagger\sqrt{\frac{5}{4}}}\dagger\sqrt{\frac{1}{2}\dagger\sqrt{\frac{1}{20}}}}$$

dunque $E : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{3D\dagger D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}\dagger\sqrt{\frac{5}{4}}}\dagger\sqrt{\frac{1}{2}\dagger\sqrt{\frac{1}{20}}}}$

$$= 1 : \frac{3\sqrt{3}\dagger\sqrt{15}}{\sqrt{10\dagger\sqrt{20}}\dagger\sqrt{2\dagger\sqrt{\frac{4}{5}}}}$$

COROLLARIO XXV.

La ſolidità del cubo alla ſolidità del Δodecaedro, come $1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$, poichè

$$E : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $E : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{12}+\sqrt{\frac{12}{5}}}$
$= 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$.

COROLLARIO XXVI.

E per ultimo la ſolidità dell' icoſaedro a quella del Δodecaedro come $1 : \frac{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

perchè $I : S = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{_5}}$$

dunque $I : \Delta = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}} :$
$\frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

CO-

TEOREMA V.

Tutta la ſuperficie di qualunque priſma circoſcritto ad un cilindro è alla ſuperficie intiera del cilindro, come il perimetro della baſe del priſma alla circonferenza della baſe del cilindro.

DIMOSTRAZIONE.

Le ſuperficie del priſma, e del cilindro ſono eguali a due rettangoli: le di cui baſi ſono li perimetri delle riſpettive baſi, e l' altezza è comune, eſcluſe però le baſi; ma queſti rettangoli, eſſendo egualmente alti ſono come le baſi; dunque la ſuperficie del priſma è alla ſuperficie del cilindro,ſenza le baſi, come il perimetro della baſe del priſma alla circonferenza della baſe del cilindro; ma per il *Teor. I.* del Signore Zanotti le baſi ancora ſono nell iſteſſa proporzione de' perimetri; dunque aggiungendo queſte tanto al priſma, quanto al cilindro, ſarà l' intiera ſuperficie del priſma all' intiera del cilindro, come il perimetro della baſe del priſma alla circonferenza della baſe del cilindro, il che ec.

COROLLARIO I.

Ma la ſolidità del priſma a quella del cilindro egualmente alto è come la baſe del

pri-

priſma alla baſe del cilindro; dunque le ſolidità, le ſuperficie, le baſi, ed i perimetri delle baſi di queſti due corpi ſono nella medeſima proporzione.

COROLLARIO II.

Se il priſma circoſcritto al cilindro avrà per baſe un triangolo equilatero, e al priſma ſarà circoſcritto un altro cilindro ſarà la ſuperficie del cilindro circoſcritto a quella del priſma inſcritto, eſcluſe le baſi, in doppia ragione di quella, che ha la ſuperficie intiera del cilindro inſcritto alla ſuperficie intiera del priſma, per queſto *Teor.* e per il *Cor. II. e III. del Teor. I.*

TEOREMA VI.

Tutta la ſuperficie di una piramide circoſcritta ad un cono è alla ſuperficie intiera del cono iſcritto, come il perimetro della baſe della piramide alla circonferenza della baſe del cono.

DIMOSTRAZIONE.

Le ſuperficie della piramide, e del cono ſenza le baſi ſono eguali a due triangoli, la di cui altezza è comune, e le baſi ſono i perimetri delle riſpettive baſi; ma queſti due triangoli egualmente alti ſono come le baſi; dunque la ſuperficie della piramide

è alla

è alla ſuperficie del cono, eſcluſe le baſi, come il perimetro della baſe di uno alla circonferenza della baſe dell' altro; ed aggiungendo le baſi, che ſono nell' iſteſſa proporzione de' perimetri per il *Teor. I.* del Signore Zanotti, tutta la ſuperficie della piramide è a quella del cono, come il perimetro della baſe della piramide alla circonferenza della baſe del cono, il che ec.

COROLLARIO I.

E ſiccome eſſendo sì la piramide, che il cono egualmente alti, le loro ſolidità ſono come le baſi; dunque le ſolidità ſono come le ſuperficie, e le ſuperficie, ſolidità, baſi, e perimetri delle baſi ſono nell' iſteſſa proporzione.

COROLLARIO II.

E' abbaſt nza chiaro lo ſteſſo che ſi è detto nel *Cor. II. del Teor. preced.* verificarſi ancora della ſuperficie del cono circoſcritto, riſpetto alla piramide di baſe triangolare equilatera.

FINE.

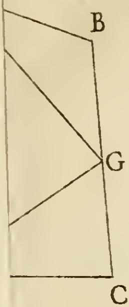
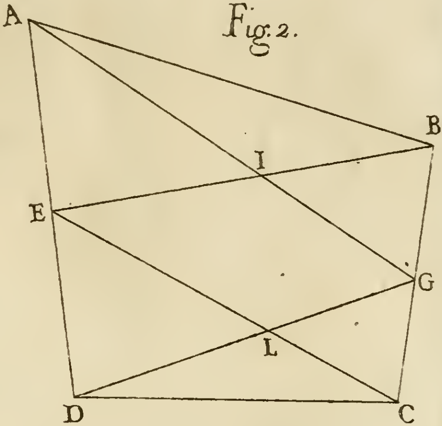


Fig. 2.



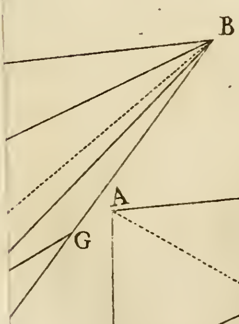


Fig. 4.

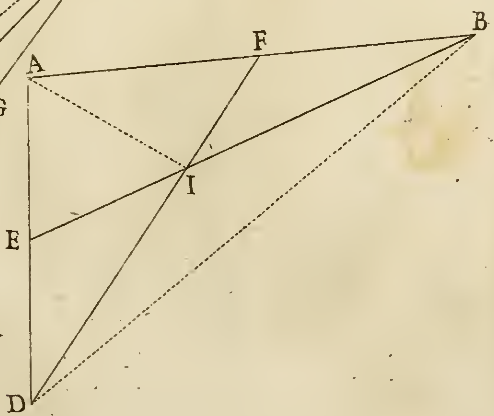


Fig. 1.

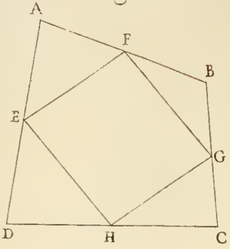


Fig. 2.

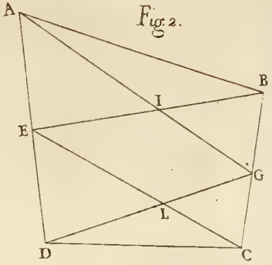


Fig. 3.

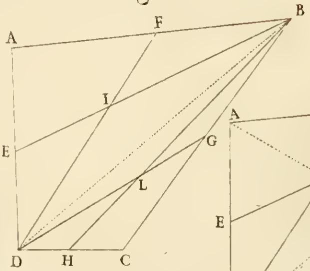
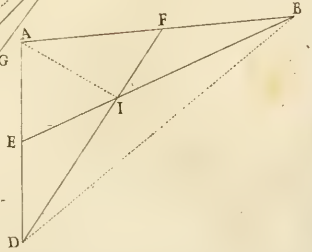


Fig. 4.



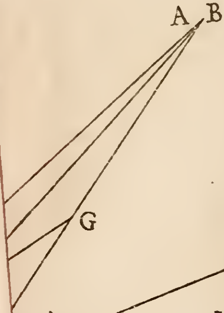


Fig. 6.

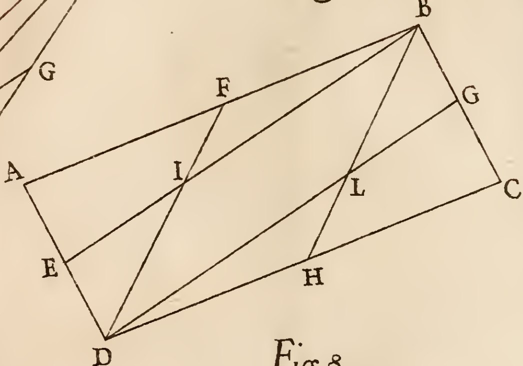


Fig. 8.

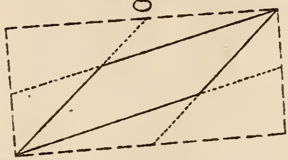
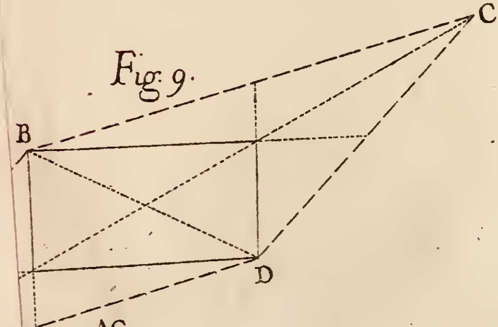
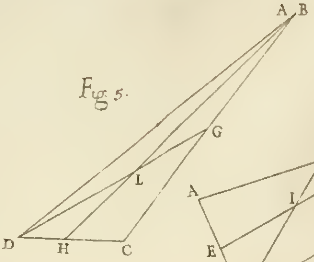


Fig. 9.



$BD = \frac{AC}{3}$



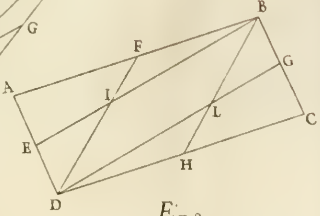


Fig. 7.

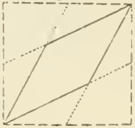
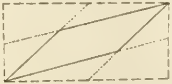
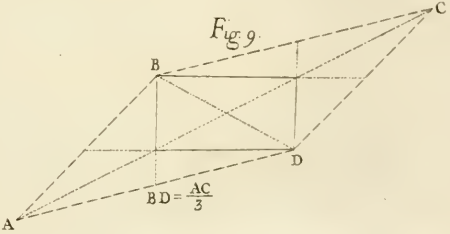


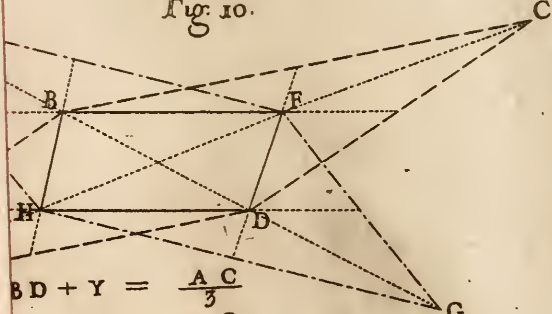
Fig. 8.





Tav. III.

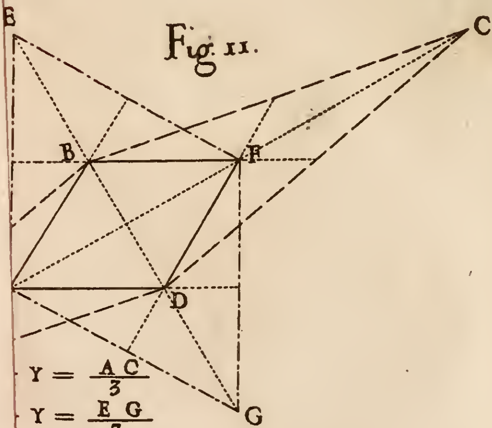
Fig. 10.



$BD + Y = \frac{AC}{3}$

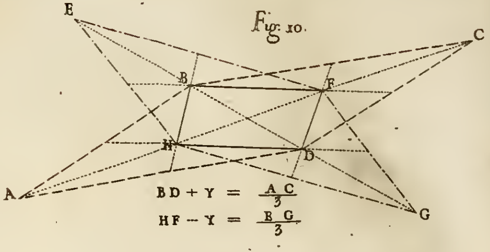
$HF - Y = \frac{EG}{3}$

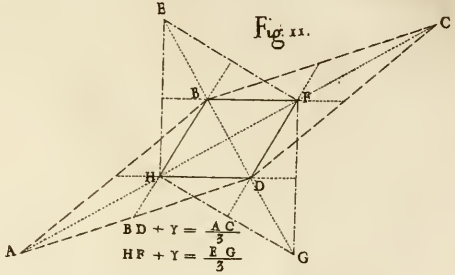
Fig. 11.



$Y = \frac{AC}{3}$

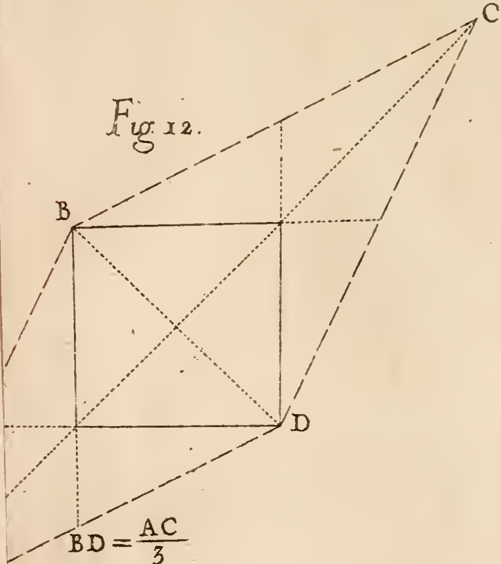
$Y = \frac{EG}{3}$

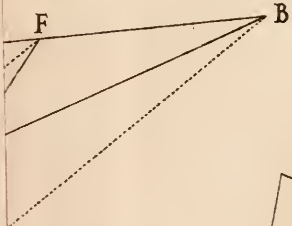

Fig. 10.
E
C
B
F
H
D
A
G
BD + Y = AC/3
HF − Y = EG/3


Fig. 11.
E
C
B
F
H
D
A
G
BD + Y = AC/3
HF + Y = EG/3

Tav. IV.

Fig. 12.

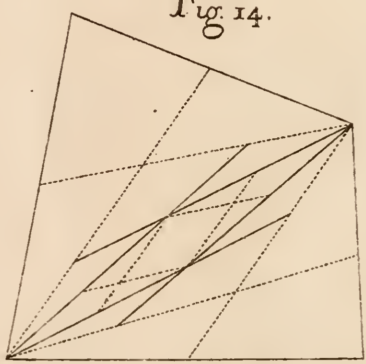




ig. 13.

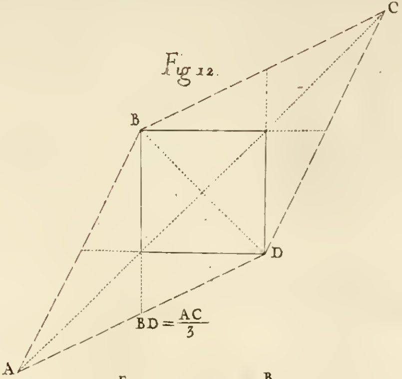
$: \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \& \ o$

Fig. 14.



$S \div \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \& \ o = \frac{a}{2}$

Fig. 12.



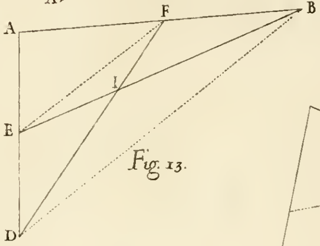
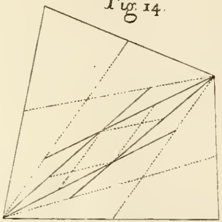


Fig. 13.

Fig. 14.



$\div\, a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \&\, o$ $\quad S \div \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \&\, o = \frac{a}{2}$

94-B3181